Problemas Seleccionados Resueltos: Máquinas de Turing

1. *Diseñar una máquina de Turing que al serle introducida una sucesión finita de "1", escritos en casillas contiguas, y con la cabeza lectora-inscriptora sobre uno de ellos en el estado de partida* e_0*, devuelva la sucesión de "1" y otra sucesión a su derecha con el doble de "1" que la de partida, estando ambas sucesiones separadas por una casilla vacía.*

Solución. La estrategia a seguir para crear la máquina es la siguiente:

1. Se busca el inicio de la sucesión de "1".

2. Se cambia el primer "1" de la sucesión de la izquierda por "a".

3. Se busca el final de la sucesión de los "1". Se deja una casilla en blanco y en las dos casillas siguientes vacías se añaden un "1" en cada una de ellas.

4. Se retrocede hacia la izquierda en busca del primer "1" de la sucesión de la izquierda que no haya sido duplicado. Cuando lo encuentra, cambia "1" por "a" y recorre la sucesión de casillas que contienen los "1" de la sucesión inicial hacia la derecha, pasa la casilla vacía y las casillas que contienen los "1" que se van añadiendo y se colocan en las dos casillas vacías siguientes un "1"

5. Se reitera el paso 4. hasta que se acaben los "1" de la sucesión de la izquierda.

6. Se cambian las "a" de la sucesión de la izquierda por "1" y cuando se acaben las casillas con "a" la máquina se para.

Si denotamos por s_0 la casilla en blanco, los cuádruples que emplearemos serán los siguientes:

1. Para realizar la etapa 1 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_1 = \{e_0 1 I e_0, e_0 s_0 D e_1\}$.

2. Para realizar la etapa 2 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_2 = \{e_1 1 a e_2\}$.

3. Para realizar la etapa 3 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_3 = \{e_2 a D e_2, e_2 1 D e_2, e_2 s_0 D e_3, e_3 s_0 1 e_4, e_4 1 D e_5, e_5 s_0 1 e_6\}$

4. Para realizar la etapa 4 y 5 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_4 = \{e_6 1 I e_7, e_7 1 I e_7, e_7 s_0 1 e_0, e_0 a D e_1, e_3 1 D e_3\}$

6. Para realizar la etapa 6. empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_5 = \{e_1 s_0 I e_8, e_8 a 1 e_9, e_9 1 I e_8\}$

En definitiva, la máquina de Turing tiene por símbolos a $S = \{1, s_0, a\}$, por estados a $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_9\}$ y por cuádruples a $\mathfrak{C} = \cup_{i=1}^{5} \mathfrak{C}_i$.

2. *Diseñar una máquina de Turing que al serle introducida dos sucesiones de "1", escritos en casillas contiguas y separadas por el signo* $-$*, ofrezca como resultado la resta de ambos números. El estado de partida es el* e_0 *y la cabeza lectora-inscriptora se encuentra sobre una casilla no vacía.*

Solución. La estrategia que podemos seguir para diseñar la máquina de Turing pedida es la siguiente:

1. Buscamos la primera casilla que esté escrita (esto es, la casilla escrita situada más a la izquierda en la cinta). Para ello, nos desplazamos hacia la izquierda hasta encontrarnos con una casilla no vacía.

2. Borramos el primer 1 de la sucesión de "1" de la izquierda y nos movemos hacia la derecha hasta encontrarnos con el símbolo "-".

3. A continuación pasamos las casillas que contienen los "1" de la sucesión de la derecha hasta que llegamos al "1 que está situado más a la derecha de la sucesión de la derecha. Entonces, se borra el último de los "1" de la sucesión de la derecha. Si no existiera, se busca el símbolo "-" y se cambia por "1".

4. Se reiteran los pasos 2 y 3 hasta que se acaben los "1" de la sucesión de la izquierda y en ese momento la máquina examina si quedan "1" en la sucesión de la derecha. Si quedan se para y si no quedan tampoco en la parte derecha es porque se han introducido el mismo número de "1" en la sucesión de la derecha y en la sucesión de la izquierda, luego va a cambiar "-" por 0.

Si denotamos por s_0 la casilla en blanco, los cuádruples que emplearemos serán los siguientes:

1. Para realizar la etapa 1 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_1 = \{e_0 1 I e_0, e_0 - I e_0, e_0 s_0 D e_1\}$.

2. Para realizar la etapa 2 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_2 = \{e_1 1 s_0 e_2, e_2 s_0 D e_3, e_3 1 D e_3, e_3 - D e_4\}$.

3. Para realizar la etapa 3 empleamos los cuádruples $\mathfrak{C}_3 = \{e_4 1 D e_4, e_4 s_0 I e_5, e_5 1 s_0 e_6, e_6 s_0 I e_0, e_5 - 1 e_9\}$.

4. Para realizar la etapa 4 nos fijamos que al tener el cuádruple $e_6 s_0 I e_0$, el proceso de borrado del "1" situado más la izquierda y del "1" situado más a la derecha. Por

tanto, sólo nos queda crear los cuádruples que nos permitan detectar si se acaban los "1" de la parte izquierda. Estos son: $\mathfrak{C}_4 = \{e_1 - De_7, e_7 s_0 I e_8, e_8 - 0e_8\}$. Por tanto, la máquina de Turing que hemos creado tiene por conjunto de símbolos $S = \{1, -, s_0, 0\}$, por conjunto de estados $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_9\}$ y por cuádruples $\mathfrak{C} = \cup_{i=1}^4 \mathfrak{C}_i$.

3. *Diseñar una máquina de Turing que al serle introducidos en la cinta dos números naturales m y n escritos en notación unaria separados por el símbolo & y el resto de las casillas en blanco con la cabeza lectora-inscriptora sobre una de las casillas no vacía devuelva tras su actuación $m - n$, en notación unaria, si $n \leq m$ o todas las casillas en blanco si $n > m$.*

Solución. La máquina que aquí nos piden es similar a la del ejemplo anterior con dos diferencias:

1. En lugar de aparecer el signo $-$ separando a ambas sucesiones tenemos el símbolo &

2. Si $n > m$, que se sucede cuando se encuentra en el estado e_7 con el símbolo "1", debemos borrar todas las casillas.

Entonces, para diseñar la máquina que nos piden procedemos de la siguiente manera: tomamos como conjunto de símbolos a $S = \{1, \&, s_0, 0\}$, consideramos los cuádruples de $\mathfrak{C}$ de la máquina anterior cambiando el símbolo "-" lo cambiamos por & en aquellos cuádruples que aparezcan y además añadimos los cuáduples de $\mathfrak{C}_5 = \{e_7 1 I e_{10}, e_{10} \& s_0 e_{11}, e_{11} s_0 D e_{10}, e_{10} 1 s_0 e_{11}\}$ que permiten borrar las casillas que debemos cuando $n > m$ y se añaden los estados e_{10} y e_{11} al conjunto de estados E de la máquina del ejemplo anterior.

4. *(i) Sean n y m dos números naturales. Diseñar una máquina de Turing que al serle introducida una sucesión de n '0' y m '1' escritos en casillas contiguas y con la cabeza lectora-inscriptora sobre uno de ellos en el estado de partida e_0 devuelva la sucesión inicial y otra sucesión situada a su derecha que contenga n 'a', escritos en casillas contiguas, si n es par y $m + 1$ 'b', escritos en casillas contiguas, si n es impar. Entre ambas sucesiones (la original y la generada) se dejará un espacio en blanco*

Solución. Para diseñar la máquina de Turing pedida, seguiremos el siguiente algoritmo:

1. Determinar si hay un número par o impar de "0" en la sucesión introducida. Para ello, nos colocaremos al final de la sucesión recorreremos ésta hacia la izquierda pasando de un estado e a otro e' y viceversa según nos encontremos una casilla con el valor "0".

2. Una vez conocida la paridad del número de "0" que han sido escritos en la cinta, lo que se sabrá según el estado e o e' al que se llegue en la primera casilla vacía situada a la izquierda del inicio de la sucesión, procederemos de la manera siguiente:

2.1 Si el estado nos indica que hay un número par de "0" escritos, entonces buscamos la primera casilla que contenga "0" la marcamos con un símbolo "x" y recorremos la sucesión de casillas escritas hacia la derecha hasta encontrar una casilla vacía y en la casilla contigua empezaremos a escribir la primera de las "a" de la sucesión que queremos crear. A continuación volveremos hacia la izquierda hasta toparnos con "x", lo cambiaremos por "0" y buscaremos el siguiente "0". Marcaremos la casilla que lo contiene de nuevo con "x" y localizaremos el final de las casillas escritas para colocar una "a". Recorreremos otra vez la sucesión hacia la izquierda hasta encontrar "x", lo cambiaremos por "0" y reiteraremos el proceso hasta que se acaben los "0". En ese momento, la máquina se parará finalizando la computación.

2.2 Si el estado nos indica que hay un número impar de "1" escritos, entonces buscamos la primera casilla que contenga "1" la marcamos con un símbolo "y" y recorremos la sucesión de casillas escritas hacia la derecha hasta encontrar una casilla vacía y en la casilla contigua empezaremos a escribir la primera de las "b" de la sucesión que queremos crear. Luego recorremos la sucesión hacia la izquierda hasta encontrarnos con la casilla que lleva escrito "y", cambiaremos este valor por "1" y buscaremos la primera casilla situada a su derecha que contenga otro "1". En esa casilla, escribiremos ahora "y", nos moveremos hacia la derecha para localizar la última casilla escrita y en su contigua, que estará vacía escribiremos "b". Regresaremos hacia la izquierda en busca de la casilla en la que habíamos colocado "y", lo cambiaremos por "1" e iremos a buscar el siguiente "1" situado a su derecha. Cuando lo encontremos, colocaremos en esa casilla"y" y repetiremos el proceso hasta que se acaben los "1". En ese momento, buscaremos el final de la sucesión de casillas escritas y añadiremos la última de las "b" que necesitamos. Después de hacerlo la máquina se parará, terminando la computación dada.

Igual que en ejercicios anteriores, denotamos la casilla en blanco por el símbolo s_0. Los cuádruples que nos servirán para ejecutar la estrategia anterior son:

1. Cuádruples para la etapa 1:

$$\mathfrak{C}_1 = \{e_0 0 D e_0, e_0 1 D e_0, e_0 s_0 I e_1, e_1 1 I e_1, e_1 0 I e_2, e_2 1 I e_2, e_2 0 I e_1, e_1 s_0 D e_4, e_2 s_0 D e_3\}$$

   Observamos que si llegamos a la primera casilla no vacía situada a la izquierda de la sucesión con el estado e_1 significa que en las casillas ha aparecido un número par de "0" escritos y si llegamos con el estado e_2, entonces tenemos escritos un número impar de "1". Si hemos llegado con e_1, la cabeza lectora pasa al estado e_4 y en el otro caso cambia a e_3.

2. Cuádruples para la etapa 2.1: Como ya hemos dicho, corresponden al caso en el que hay un número par de "0" y, por tanto, nos encontraremos en el estado e_4 examinando el contenido de la primera casilla no vacía. En los cuádruples de esta etapa intervendrán estados de la forma e_{2k} con $k \geq 2$. En concreto,

$$\mathfrak{C}_{2.1} = \{e_4 1 D e_4, e_4 0 x e_6, e_6 x D e_6, e_6 0 D e_6, e_6 1 D e_6, e_6 s_0 D e_8, e_8 s_0 a e_{10}, e_8 a D e_8,$$

$$e_{10}aIe_{12}, e_{12}s_0Ie_{14}, e_{14}1Ie_{14}, e_{14}0Ie_{14}, e_{14}x0e_4\}$$

Cuádruples para la etapa 2.2: En esta etapa usaremos estados con índice impar e_{2k+1} con $k \geq 1$.

$$\mathfrak{C}_{2.2} = \{e_30De_3, e_31ye_5, e_5yDe_5, e_50De_5, e_51De_5, e_5s_0De_7, e_7s_0be_9, e_7bDe_7, e_9bIe_{11},$$

$$e_{11}bIe_{11}, e_{11}s_0Ie_{13}, e_{13}0Ie_{13}, e_{13}1Ie_{13}, e_{13}y1e_3, e_3s_0De_{15}, e_{15}bDe_{15}, e_{15}s_0be_3\}$$

Por tanto, una máquina de Turing que realiza lo pedido, tiene por conjunto de símbolos a $S = \{0, 1, a, b, x, y, s_0$, estados a $E = \{e_0, \ldots, e_{15}\}$ y cuádruples a $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_{2.1} \cup \mathfrak{C}_{2.2}$.

5. *Dados $S = \{s_0, \ldots, s_m\}$ y $E = \{e_0, e_n\}$ dos conjuntos finitos cuyos elementos son símbolos y estados, respectivamente, se llama* **quíntuple** *a una 5-tupla del tipo $e_is_js_kxe_l$, donde $e_i, e_l \in E$, $s_j, s_k \in S$ y $x \in \{D, I\}$. Se interpreta:*

- *$e_is_js_kDe_l$: Cuando se encuentre la cabeza lectora-inscriptora en el estadp e_i examinando una casilla que contiene el símbolo s_j, cambia el contenido de la misma por s_k, se mueve una casilla a la derecha y entra en el estado e_l.*

- *$e_is_js_kIe_l$: Cuando se encuentre la cabeza lectora-inscriptora en el estadp e_i examinando una casilla que contiene el símbolo s_j, cambia el contenido de la misma por s_k, se mueve una casilla a la izquierda y entra en el estado e_l.*

Se llama **máquina de Turing definida mediante quíntuples** *a $\mathbb{T}_q = (S, E, \mathfrak{Q})$ donde $\mathfrak{Q}$ es un conjunto finito cuyos elementos son quíntuples verificando que no existen dos quíntuples que comiencen por el mismo par e_is_j.*

(i) Probar que cada máquina de Turing definida mediante quíntuples admite una máquina de Turing definida mediante cuádruples con el mismo conjunto de símbolos y que simula su forma de actuar y recíprocamente.

Solución. Basta observar que si tenemos una máquina definida mediante quíntuples, podemos crear la máquina de Turing definida mediante cuádruples que se obtiene de seguir el siguiente proceso:

1. Si en $\mathbb{T}_q$ está el quíntuple $e_is_js_kDe_l$, añadimos al conjunto de cuádruples a $e_is_js_ke_{d,l}$ y $e_{d,l}s_kDe_l$.

2. Si aparece en $\mathbb{T}_q$ el quíntuple $e_is_js_kIe_l$, añadimos al conjunto de cuádruples a $e_is_js_ke_{i,l}$ y $e_{i,l}s_kIe_l$.

Observamos que en la nueva máquina definida mediante cuádruples el conjunto de símbolos permanece inalterado y el nuevo conjunto de estados contiene a E y a un subconjunto E_1 que lleva los estados de la forma $e_{d,l}$, $e_{i,l}$ que hayan sido necesario introducir.

Obviamente, la máquina de Turing definida mediante cuádruples que hemos creado simula la acción de la máquina definida mediante quín tuples.

Recíprocamente, si tenemos una máquina de Turing definida mediante cuádruples, sutituiremos cada uno de éstos de acuerdo a su tipo de la forma siguiente

1. Si aparece un cuádruple $e_i s_j D e_l$ lo cambiaremos por el quíntuple $e_i s_j s_j D e_l$.

2. Si aparece un cuádruple $e_i s_j I e_l$ lo cambiaremos por el quíntuple $e_i s_j s_j I e_l$.

3. Si aparece un cuádruple $e_i s_j s_k e_l$ lo cambiaremos por los $|S|+1$ quíntuples $e_i s_j s_k D e_{i,l}$, $e_{i,l} x x I e_l$, con $x \in S$.

De esta manera la máquina de Turing definida mediante quíntuples simulará las acciones de la definida mediante cuádruples.