Problemas Seleccionados Resueltos: Semigrupos

1. *Sea $*$ una ley de composición interna sobre un conjunto S. Demostrar que si existen $s, s' \in S$ elementos cero a izquierda distintos, entonces no existen en S elementos cero.*

Solución. Supongamos, por reducción al absurdo que existe un elemento cero, que denotamos por x. Entonces, por ser x elemento cero se cumple

$$s * x = x \text{ y } s' * x = x.$$

Pero como s y s' son elementos cero a izquierda también se cumple

$$s * x = s \text{ y } s' * x = s'$$

luego

$$s = s * x = x = s' * x = s'$$

lo que contradice el que $s, s' \in S$ sean elementos cero a izquierda distintos. Por consiguiente, no existe x elemento cero.

2. *Demostrar que si l y d son dos elementos neutros a izquierda y derecha, respectivamente, de un semigrupo $(S, .)$, entonces $(S, .)$ es un monoide. Deducir que si $(S, .)$ tiene dos elementos neutros a izquierda distintos, entonces no existe ningun elemento de S que sea elemento neutro a derecha.*

Solución. Como l es neutro a izquierda, entonces

$$l \cdot s = s, \ \forall s \in S \tag{1}$$

y como d es neutro a derecha, entonces

$$s' \cdot d = s', \ \forall s' \in S \tag{2}$$

Ahora, tomado en (1) $s = d$, se obtiene

$$l \cdot d = d \tag{3}$$

y tomando en (2) $s' = l$, se obtiene

$$l \cdot d = l \tag{4}$$

Por tanto, de (3) y (4) deducimos

$$s = l \cdot d = l,$$

esto es los elementos neutro a derecha e izquierda coinciden y, por tanto, existe en S un elemento neutro. Como además $(S, .)$ es un semigrupo, entonces $(S, .)$ es un semigrupo con elemento neutro, esto es, un monoide.

Para ver la segunda parte, supongamos, por reducción al absurdo que existe un elemento neutro a derecha d_1. Entonces, si l y l' son los elementos neutros a izquierda distintos que existen, la primera parte del ejercicio nos permite deducir que

$$l = d_1$$

y que

$$l' = d_1,$$

luego $l{=}l'$, una contradicción. Por tanto, no existe d_1 elemento neutro a derecha si hay dos elementos neutros a izquierda distintos.

3. *Sea* $(S, *)$ *un sistema algebraico y* $E_S = \{s \in S | s \text{ es idempotente}\}$. *Demostrar que si* $(S, *)$ *es un grupo con elemento neutro* 1, *entonces* $E_S = \{1\}$. *Si* $(S, *)$ *es un monoide, que no es grupo, ¿se verifica que* $E_S = \{1\}$*?*

Solución. Sea $s \in E_S$. Entonces, como s es idempotente, se tiene que

$$s * s = s. \tag{1}$$

Pero con $(S, *)$ es un grupo, el elemento s tiene inverso $s^{-1} \in S$ verificando

$$s^{-1} * s = 1 = s * s^{-1}.$$

Ahora si en la igualdad (1) multiplicamos por s^{-1} en ambos lados de la igualdad y aplicamos la propiedad asociativa, se sigue:

$$s = 1 * s = (s^{-1} * s) * s = s^{-1} * (s * s) = s^{-1} * s = 1,$$

luego $s = 1$.

Si $(S, *)$ es un monoide que no es grupo E_S no tiene que ser únicamente el $\{1\}$. Por ejemplo, si tomamos $\mathbb{Z}$ con el producto estandard de números enteros, tenemos que $E_S = \{1, 0\}$.

4. *En* $\mathbb{R} - \{0\}$ *se define la siguiente operación:* $a * b = |a|b$, $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. *Probar que es asociativa y estudiar la existencia de elementos neutros a izquierda. ¿Existe elemento neutro?*

Solución. Sean $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$. Entonces,

$$(a * b) * c = |a|b * c = ||a|b|c = |a||b|c$$

y

$$a * (b * c) = |a|b * c = |a||b|c$$

luego se cumple la propiedad asociativa.

Observamos que

$$1 * b = 1b = b, \ \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

y

$$(-1) * b = |-1|b = 1b = b, \ \forall b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

luego 1 y -1 son elementos neutros distintos a izquierda. Por tanto, aplicando el segundo de los ejercicios que hemos resuelto, se sigue que no hay elemento neutro.

5. *Sea $(S, .)$ un monoide. Demostrar que si un elemento $x \in S$ tiene elemento inverso a derecha e izquierda, entonces es inversible.*

Solución. Supongamos que x tiene un elemento inverso a izquierda, que denotamos por x_l^{-1}, y un elemento a derecha, que denotamos por x_d^{-1}. Entonces, como x_l^{-1} es elemento neutro a izquierda, se cumple

$$x_l^{-1}.x = 1 \tag{1}$$

y como x_d^{-1} es neutro a derecha, se tiene

$$x.x_d^{-1} = 1 \tag{2}$$

Entonces, por (1)

$$(x_l^{-1}.x).x_d^{-1} = 1.x_d^{-1} = x_d^{-1} \tag{3}$$

y por (2)

$$x_l^{-1}.(x.x_d^{-1}) = x_l^{-1}.1 = x_l^{-1} \tag{4}$$

Ahora, por la propiedad asociativa $(x_l^{-1}.x).x_d^{-1} = x_l^{-1}.(x.x_d^{-1})$, luego igualando (3) y (4) deducimos que $x_d^{-1} = x_l^{-1}$, así que x es inversible.

6. *Sea $(S, .)$ un monoide y $G_S = \{s \in S | s \text{ es inversible}\}$. Probar que G_S es un conjunto no vacío y que $(G_S, .)$ es un grupo.*

Solución. G_S es un conjunto no vacío porque el elemento neutro, que denotaremos por 1, pertenece a G_S ya que el elemento neutro es inversible. Por otro lado, $G_S \subseteq S$ y para todo $x, y \in G_S$ (por tanto, x e y tienen elemento inverso en S, que denotamos por x^{-1}

y y^{-1}, respectivamente), se cumple que $xy \in G_S$ ya que el elemento xy tiene por inverso a $y^{-1}x^{-1}$, que también pertenece a S. Por tanto, el producto de S restringido a G_S es una operación interna. Además, $(G_S, .)$ es un semigrupo (por verificar la operación $\cdot$ la propiedad asociativa en S), tiene elemento neutro, ya que 1 también pertenece a G_S y por construcción cada elemento de G_S tiene inverso, luego G_S es un grupo.

7. *Sea* $S = \{(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 1, 0 \ i, j = 1, \ldots, m\}$ *y en* S *consideramos el producto usual de matrices en el que 0 y 1 se operan de la siguiente manera:*

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Estudiar si S *es un semigrupo.*

Solución. Teniendo en cuenta cómo se multiplican matrices, para que S sea un semigrupo, basta estudiar si S verifica para las operaciones + y . las propiedades asociativa y la distributiva.