Problemas Propuestos: Semigrupos

1. Sea $*$ una ley de composición interna sobre un conjunto S. Demostrar que si existen $s, s' \in S$ elementos cero a izquierda distintos, entonces no existen en S elementos cero.

2. Demostrar que si l y d son dos elementos neutros a izquierda y derecha, respectivamente, de un semigrupo $(S, .)$, entonces $(S, .)$ es un monoide. Deducir que si $(S, .)$ tiene dos elementos neutros a izquierda distintos, entonces no existe ningun elemento de S que sea elemento neutro a derecha.

3. Sea $(S, *)$ un sistema algebraico y $E_S = \{s \in S | s \text{ es idempotente}\}$. Demostrar que si $(S, *)$ es un grupo con elemento neutro 1, entonces $E_S = \{1\}$. Si $(S, *)$ es un monoide, que no es grupo, ¿se verifica que $E_S = \{1\}$?

4. Sea $(S, *)$ un semigrupo y sea $x \in S$ tal que existen $k, r \in \mathbb{N}$ con $1 \leq r \leq k - 1$, $x^k = x^r$ y $x^i \neq x^j$, si $1 \leq i < j \leq k - 1$.

   ((i) Demostrar que si $p = k - r$, entonces $x^n = x^{n+p}$, $\forall n \geq r$.

   (ii) Demostrar que el conjunto $\{x^r, x^{r+1}, \ldots, x^{r+p-1}\}$ es un grupo.

5. Sea $\alpha : S \to P$ un homomorfismo de semigrupos y $X \subseteq S$. Demostrar que

   $$\alpha(< X >) =< \alpha(X) > .$$

   Deducir que si X es un subsemigrupo de S, entonces $\alpha(X)$ es subsemigrupo de P.

6. En $\mathbb{R} - \{0\}$ se define la siguiente operación: $a * b = |a|b$, $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Probar que es asociativa y estudiar la existencia de elementos neutros a izquierda. ¿Existe elemento neutro?

7. Sea $(S, .)$ un monoide. Demostrar que si un elemento $x \in S$ tiene elemento inverso a derecha e izquierda, entonces es inversible.

8. Sea s un elemento tal que $< s >= \{s^n | n \in \mathbb{N}\}$ es finito y sean r y m los menores enteros positivos tales que $s^r = s^{r+m}$. Demostrar que $s, \ldots, s^{r+m-1}$ son elementos distintos y determinar $< s >$.

9. Sea $(S, .)$ un monoide y $G_S = \{s \in S | s \text{ es inversible}\}$. Probar que G_S es un conjunto no vacío y que $(G_S, .)$ es un grupo.

10. Sea $S = \{(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 1, 0 \; i, j = 1, \ldots, m\}$ y en S consideramos el producto usual de matrices en el que 0 y 1 se operan de la siguiente manera:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Estudiar si S es un semigrupo.