Tema 3: Autómatas

7. Relación entre semigrupos y autómatas.

Sea S $=(S,E,\delta)$ un semiautómata. Consideremos el monoide libre con base S, Ω_S y sea $x\in\Omega_S$. Definimos

$$\begin{array}{cccc} f_x: & E & \to & E \\ & e & \mapsto & \widehat{\delta}(e,x) \end{array}$$

Entonces, el conjunto $M_{\mathrm{S}}=\{f_x | x\in\Omega_S\}$ con la composición es un semigrupo llamado **semigrupo de S**.

En Ω_S, podemos definir la siguiente relación:

$$\forall x_1,x_2\in\Omega_S, \qquad x_1 \mathrm{R} x_2 \Longleftrightarrow f_{x_1}=f_{x_2}.$$

Entonces, la relación R es una relación de equivalencia compatible con la concatenación definida en Ω_S y Ω_S/R es isomorfo a $(M_{\mathrm{S}},\cdot)$, donde

$$f_{x_1}\cdot f_{x_2}=f_{x_2}\circ f_{x_1},$$

esto es, para cada $e\in E$

$$(f_{x_1}\cdot f_{x_2})(e)=f_{x_2}\circ f_{x_1}(e)=f_{x_2}(f_{x_1}(e))=f_{x_2}(\widehat{\delta}(e,x_1))=\widehat{\delta}(e,x_1x_2)=f_{x_1x_2}(e).$$

Por otro lado, dado un monoide $(S,\cdot)$, podemos definir un semiautómata S cuyo semigrupo M_{S} es isomorfo a $(S,\cdot)$. Para ello, basta con definir S $=(S,S,\delta)$, donde

$$\begin{array}{cccc} \delta: & S\times S & \to & S \\ & (s,s') & \mapsto & s\cdot s' \end{array}$$