Tema 3: Autómatas

1. Introducción.

A finales de los años 30 del siglo XX, surgió la necesidad de describir en lenguaje maatemático ciertas acciones del sistema nervioso del ser humano. Se pretendía buscar un modelo matemático que simulara la manera en la que las neuronas y las terminaciones nerviosas podían generar, codificar almacenar y utilizar la información. Así, en 1943 W. McCulloch y W. Pitts presentaron un trabajo que se centra en dar modelos que expliquen las funciones del cerebro y las redes neuronales, empleando lo que se conoce como **automáta finito**. Sus estudios fueron continuados por Kleene (1951), Burks (1954), J. Wright y otros.

Intuitivamente, un autómata finito es un mecanismo que consta de un conjunto de estados internos y una serie de órdenes (que vienen dadas por dos funciones) que le indican cómo tiene que variar su estado interno y qué respuesta debe dar tras serle introducida una entrada. La misión esencial de los estados internos es ir recordando cierto tipo de información. Por otro lado, se desea que la respuesta dada por el mecanismo cuando se le introduce dos veces la misma secuencia de entrada y parte del mismo estado es idéntica. Esto es, la respuesta ofrecida no depende del instante de tiempo en el que se ejecute, sino de las condiciones introducidas.

2. Semiautómatas: definiciones básicas.

Definición. Un **semiautómata finito** es un triple $\mathrm{S} = (S, E, \delta)$, donde S y E son dos conjuntos finitos no vacíos, cuyos elementos se llaman **símbolos de entrada** y **estados**, respectivamente, y $\delta : E \times S \to E$ es una función llamada **función próximo estado ó función transición**.

Intuitivamente, podemos interpretar una semiautómata como un mecanismo que posee una conjunto de estados internos que varían de acuerdo al símbolo de entrada recibido.

Al igual que sucedía con las máquinas de Turing, los semiautómatas también se pueden representar mediante tablas ó mediante grafos dirigidos

Como es posible suministrar entradas sucesivas a un semiautómata, nos interesa extender de manera lógica la función δ a $E \times \Omega_S$, de forma que si en el instante t se encuentra en el estado e_j y se le suministra la palabra $x \in \Omega_S$, entonces la extensión de δ nos dé el estado en el que se encuentra el semiautómata en el instante $t + l(x)$, donde $l(x)$ representa la longitud de la palabra x, esto es, el estado en el que se encuentra el mecanismo tras suministrar en el orden que aparecen las letras de x. Para ello, basta definir la extensión de δ, que denotaremos también por δ, por abuso del lenguaje, a

$$\delta(e,x)=\begin{cases} e, & \text{si } x=\Lambda \\ \delta(e,s), & \text{si } x=s\in S \\ \delta(\delta(e,y),s), & \text{si } x=ys, \text{ siendo } y\in\Omega_S \text{ y } s\in S \end{cases}$$

donde $e \in E$ y $x \in \Omega_S$.

Por último, un concepto que surge de forma natural es el de isomorfismo de semiautómatas. Dados dos semiautómatas $\mathrm{S}_1 = (S, E_1, \delta_1)$ y $\mathrm{S}_2 = (S, E_2, \delta_2)$ diremos que son **isomorfos** si existe una aplicación biyectiva $f : E_1 \to E_2$ tal que $\delta_2(f(e_1), s) = f(\delta(e_1, s))$, para todo $(e_1, s) \in E_1 \times S$.

3. Autómatas: máquinas secuenciales.

Definición. Un **autómata finito** es un quíntuple $\mathrm{A} = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$, donde $\mathrm{S} = (S_1, E, \delta)$ es un semiautómata, S_2 es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos se llaman **símbolos de salida** y $\lambda : E \times S_1 \to S_2$ es una función llamada **función salida**.

De manera rápida, podemos describir un autómata cómo un semiautómata capaz de emitir una respuesta.

La definición que acabamos de dar corresponde a lo que algunos autores denomina "máquina de Melay". Forman parte de lo que se conoce como máquinas secuenciales.

Al igual que sucedía en los semiautómatas, podemos representar un autómata mediante grafos dirigidos ó mediante tablas.

Nos interesa poder extender las funciones δ y λ a $E \times \Omega_{S_1}$, puesto que los mecanismos que modelizan los autómatas admiten entradas consecutivas. Para la función δ, la extensión se realiza de la misma forma que en los semiautómatas y su interpretación es la misma: el estado en el que se encontraría el mecanismo tras recibir la palabra $x \in \Omega_{S_1}$ partiendo del estado e. Sin embargo, la extensión de λ no es evidente. Por ejemplo, debemos definir $\widehat{\lambda}(e, \Lambda)$ y no puede ser Λ, ya que $\Lambda \notin S_2$. Si $\lambda(e, s) = s'$ para todo $s \in S_1$, podríamos definir $\widehat{\lambda}(e, \Lambda) = s'$. Pero esto en general no es cierto. Cuando sucede lo que significa es que la salida producida por el mecanismo no depende en realidad de la entrada recibida sino únicamente del estado en el que se encuentra. En este caso llamaremos al autómata máquina de Moore:

Definición. Una **máquina de Moore** es un quíntuple $\mathrm{M} = (S_1, S_2, E, \delta, \beta)$, donde $\mathrm{S} = (S_1, E, \delta)$ es un semiautómata, S_2 es un conjunto finito no vacío, cuyos elementos se llaman **símbolos de salida** y $\beta : E \to S_2$ es una función.

Cuando M es una máquina de Moore, entonces podemos definir a partir de ella un autómata que funcione igual tomando $\lambda = \beta \circ \delta$.

Para las máquinas de Moore la extensión natural de la función $\lambda = \beta \circ \delta$ a $E \times \Omega_{S_1}$ viene dada por

$$\widehat{\lambda}(e, x) = \begin{cases} \beta(e) & \text{si } x = \Lambda \\ \beta(\delta(e, x)) & \text{si } x \in S_1 \\ \beta(\delta(\widehat{\delta}(e, y), s)) & \text{si } x = ys, \text{ donde } y \in \Omega_{S_1} \text{ y } s \in S_1 \end{cases}$$

4. Máquinas secuenciales equivalentes.

Si probamos que cada máquina de Melay equivale a una máquina de Moore, podemos resolver el problema de extender λ a una máquina de Melay. Formalizamos lo que significa "equivalencia entre máquinas":

Definición. Sea A $= (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$ un autómata. Llamamos **función respuesta de A** a la aplicación $\psi : E \times \Omega_{S_1} \to \Omega_{S_2}$ definida por

$$\psi(e, x) = \begin{cases} \Lambda & \text{si } x = \Lambda \\ \lambda(e, x) & \text{si } x \in S_1 \\ \psi(e, y)\lambda(\widehat{\delta}(e, y), s) & \text{si } x = ys,\ y \in \Omega_{S_1},\ s \in S_1. \end{cases}$$

Definición. Sea A $= (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$ un autómata y $e \in E$. Llamamos **función respuesta inducida por** e **A** a la aplicación $\psi_e : \Omega_{S_1} \to \Omega_{S_2}$ definida por

$$\psi_e(x) = \psi(e, x), \qquad \forall x \in \Omega_{S_1}.$$

Cuando nos dan un estado $e \in E$ y una palabra $x \in \Omega_{S_1}$ podemos calcular el valor de $\psi_e(x)$ mediante una tabla, llamada **tabla de computación**, que se construye de la forma siguiente:

s	
e	$\delta(e, s)$
$\lambda(e, s)$	

Definición. Sean A$_1 = (S_1, S_2, E_1, \delta_1, \lambda_1)$ y A$_1 = (S_1, S_2, E_2, \delta_2, \lambda_2)$ dos autómatas y $e_1 \in E_1$ y $e_2 \in E_2$. Diremos que e_1 y e_2 son equivalentes si $\psi_{e_1} = \psi_{e_2}$.

Definición. Sean $\mathrm{A}_1 = (S_1, S_2, E_1, \delta_1, \lambda_1)$ y $\mathrm{A}_1 = (S_1, S_2, E_2, \delta_2, \lambda_2)$ dos autómatas. Se dice que A_1 y A_2 son equivalentes si $\{\psi_{e_1} | e_1 \in E_1\} = \{\psi_{e_2} | e_2 \in E_2\}$, o lo que es lo mismo

$$\forall e_1 \in E_1, \exists e_2 \in E_2 \text{ tal que } e_1 \text{ y } e_2 \text{ son equivalentes}$$

y

$$\forall e_2 \in E_2, \exists e_1 \in E_1 \text{ tal que } e_1 \text{ y } e_2 \text{ son equivalentes.}$$

Teorema 4.1. *Sea $A = (S_1, S_2, E_1, \delta_1, \lambda_1)$ una máquina de Melay. Entonces, existe $M = (S_1, S_2, E_2, \delta_2, \beta)$ máquina de Moore equivalente a ella.*

5. Minimización de un autómata.

Cuando tenemos un autómata $\mathrm{A}_1 = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$, podemos considerar entre los estados de E la siguiente relación de equivalencia:

$$\forall e_1, e_2 \in E, \quad e_1 \sim e_2 \quad \Longrightarrow \quad \psi_{e_1} = \psi_{e_2}.$$

Entonces, se puede definir $E/\sim$, que es el conjunto cociente de esa relación. Las clases de equivalencia de $E/\sim$ vendrán dadas por

$$[e] = \{e' \in E | e \sim e'\}.$$

Definición. Sea $\mathrm{A} = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$ un autómata. Se dice que A está dado en forma reducida si $[e] = \{e\}$, para todo $e \in E$.

Nos interesa saber si dado un autómata cualquiera existe otro equivalente a él que esté en forma reducida. La respuesta es afirmativa.

Teorema 5.1. *Sea $A = (S_1, S_2, E, \delta, \lambda)$ un autómata. Entonces, existe $\overline{A} = (S_1, S_2, \overline{E}, \overline{\delta}, \overline{\lambda})$ autómata equivalente a A que está en forma reducida.*

6. Construcción de autómatas.

Al igual que sucedía con las máquinas de Turing, es posible construir autómatas que actúen de una forma determinada, una vez que se fije el **estado de partida**, que será aquel en el que se encuentre el mecanismo cuando empiece a actuar.

Ejemplo 1. Construimos un autómata que admita como entradas "0" y "1" y que partiendo del estado e_0 proceda de la manera siguiente:

1. Si en la sucesión de entradas aparecen dos "0" consecutivos, imprime a partir de ese instante sólo "0".

2. Si en la sucesión de entradas aparece tres "1" consecutivos y previamente no han aparecido dos "0" seguidos, imprime un "1" hasta que salgan dos "0" consecutivos.

3. En el resto de las situaciones imprime "0".

Las funciones δ y λ vienen dadas por:

$$
\begin{array}{llcl}
\delta: & E \times S_1 & \to & E \\
& (e_0,0) & \mapsto & e_1 \\
& (e_0,1) & \mapsto & e_3 \\
& (e_1,0) & \mapsto & e_2 \\
& (e_1,1) & \mapsto & e_3 \\
& (e_2,0) & \mapsto & e_2 \\
& (e_2,1) & \mapsto & e_2 \\
& (e_3,0) & \mapsto & e_1 \\
& (e_3,1) & \mapsto & e_4 \\
& (e_4,0) & \mapsto & e_1 \\
& (e_4,1) & \mapsto & e_5 \\
& (e_5,0) & \mapsto & e_6 \\
& (e_5,1) & \mapsto & e_5 \\
& (e_6,0) & \mapsto & e_2 \\
& (e_6,1) & \mapsto & e_5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
\lambda: & E \times S_1 & \to & S_2 \\
& (e_0,0) & \mapsto 0 & \\
& (e_0,1) & \mapsto 0 & \\
& (e_1,0) & \mapsto 0 & \\
& (e_1,1) & \mapsto 0 & \\
& (e_2,0) & \mapsto 0 & \\
& (e_2,1) & \mapsto 0 & \\
& (e_3,0) & \mapsto 0 & \\
& (e_3,1) & \mapsto 0 & \\
& (e_4,0) & \mapsto 0 & \\
& (e_4,1) & \mapsto 1 & \\
& (e_5,0) & \mapsto 1 & \\
& (e_5,1) & \mapsto 1 & \\
& (e_6,0) & \mapsto 1 & \\
& (e_6,1) & \mapsto 1 &
\end{array}
$$

Ejemplo 2. Construimos un autómata que simula la actuación de una máquina expendedora de café y café con leche con las siguientes características:

1) El precio del café sólo es 0,55 euros.

2) El precio del café con leche es 0,65 euros.

3) La máquina funciona con monedas de 0,05, 0,20 y 0,50 euros.

4) La máquina dispone de tres botones: uno negro para el café, uno blanco para el café con leche y uno rojo que nos permite recuperar el dinero introducido ó nos da el dinero que sobra tras ser suministrado nuestro café ó café con leche.

Es obvio que el conjunto de entradas que admite es

$$S_1 = \{M5, M25, M50, B_B, B_N, B_R\}$$

donde: Mi = moneda de 0,0i euros, B_B = botón blanco, B_N = botón negro y B_R = botón rojo. El conjunto de salidas será

$$S_2 = \{N, C, CL, M5, M10, M15, M20, M25, M30, M35, \\ M40, M45, M50, M55, M60, M65\},$$

con N = nada C = café, CL = café con leche y Mi = cambios de i céntimos de euro. El conjunto de estados es $E = \{e_0, \ldots, e_{13}\}$. Las funciones δ y λ vienen dadas por las tablas:

δ	$M5$	$M20$	$M50$	BN	B_B	BR
e_0	e_1	e_4	e_{10}	e_0	e_0	e_0
e_1	e_2	e_5	e_{11}	e_1	e_1	e_0
e_2	e_3	e_6	e_{12}	e_2	e_2	e_0
e_3	e_4	e_7	e_{13}	e_3	e_3	e_0
e_4	e_5	e_8	e_{13}	e_4	e_4	e_0
e_5	e_6	e_9	e_{13}	e_5	e_5	e_0
e_6	e_7	e_{10}	e_{13}	e_6	e_6	e_0
e_7	e_8	e_{11}	e_{13}	e_7	e_7	e_0
e_8	e_9	e_{12}	e_{13}	e_8	e_8	e_0
e_9	e_{10}	e_{13}	e_{13}	e_9	e_9	e_0
e_{10}	e_{11}	e_{13}	e_{13}	e_{10}	e_{10}	e_0
e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{13}	e_0	e_{11}	e_0
e_{12}	e_{13}	e_{13}	e_{13}	e_1	e_{12}	e_0
e_{13}	e_{13}	e_{13}	e_{13}	e_2	e_0	e_0

λ	$M5$	$M20$	$M50$	B_N	B_B	B_R
e_0	N	N	N	N	N	N
e_1	N	N	N	N	N	$M5$
e_2	N	N	N	N	N	$M10$
e_3	N	N	N	N	N	$M15$
e_4	N	N	$M5$	N	N	$M20$
e_5	N	N	$M10$	N	N	$M25$
e_6	N	N	$M15$	N	N	$M30$
e_7	N	N	$M20$	N	N	$M35$
e_8	N	N	$M25$	N	N	$M40$
e_9	N	N	$M30$	N	N	$M45$
e_{10}	N	$M5$	$M35$	N	N	$M50$
e_{11}	N	$M10$	$M40$	C	N	$M55$
e_{12}	N	$M15$	$M45$	C	N	$M60$
e_{13}	$M5$	$M20$	$M50$	C	CL	$M65$

Ejemplo 3. Construimos un autómata A que tenga como alfabeto de entrada y salida a $\{0,1\}$ y que al serle introducida una palabra de Ω_{S_1} de longitud mayor o igual a 2, partiendo del estado e_1, ofrezca como salida la palabra que tiene "0" en las dos primeras posiciones y a partir de la tercera posisción las mismas letras que la palabra introducida. Como nos fijan $S_1 = S_2 = \{0,1\}$, para definir A nos falta determinar $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ y las funciones δ y λ viene dadas por

$$\begin{array}{rccc} \delta: & E \times S_1 & \to & E \\ & (e_1,0) & \mapsto & e_2 \\ & (e_1,1) & \mapsto & e_2 \\ & (e_2,0) & \mapsto & e_3 \\ & (e_2,1) & \mapsto & e_3 \\ & (e_3,0) & \mapsto & e_3 \\ & (e_3,1) & \mapsto & e_3 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \lambda: & E \times S_1 & \to & S_2 \\ & (e_1,0) & \mapsto 0 & \\ & (e_1,1) & \mapsto 0 & \\ & (e_2,0) & \mapsto 0 & \\ & (e_2,1) & \mapsto 0 & \\ & (e_3,0) & \mapsto 0 & \\ & (e_3,1) & \mapsto 1 & \end{array}$$

7. Relación entre semigrupos y autómatas.

Sea $\mathrm{S} = (S, E, \delta)$ un semiautómata. Consideremos el monoide libre con base S, Ω_S y sea $x \in \Omega_S$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} f_x: & E & \to & E \\ & e & \mapsto & \widehat{\delta}(e,x) \end{array}$$

Entonces, el conjunto $M_{\mathrm{S}} = \{f_x | x \in \Omega_S\}$ con la composición es un semigrupo llamado **semigrupo de S**.

En Ω_S, podemos definir la siguiente relación:

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega_S, \qquad x_1 \mathrm{R} x_2 \Longleftrightarrow f_{x_1} = f_{x_2}.$$

Entonces, la relación R es una relación de equivalencia compatible con la concatenación definida en Ω_S y Ω_S/R es isomorfo a $(M_{\mathrm{S}}, \cdot)$, donde

$$f_{x_1} \cdot f_{x_2} = f_{x_2} \circ f_{x_1},$$

esto es, para cada $e \in E$

$$(f_{x_1} \cdot f_{x_2})(e) = f_{x_2} \circ f_{x_1}(e) = f_{x_2}(f_{x_1}(e)) = f_{x_2}(\widehat{\delta}(e,x_1)) = \widehat{\delta}(e, x_1x_2) = f_{x_1x_2}(e).$$

Por otro lado, dado un monoide $(S, \cdot)$, podemos definir un semiautómata S cuyo semigrupo M_{S} es isomorfo a $(S, \cdot)$. Para ello, basta con definir $\mathrm{S} = (S, S, \delta)$, donde

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S \times S & \to & S \\ & (s, s') & \mapsto & s \cdot s' \end{array}$$