Tema 2: Máquinas de Turing

2. Descripción de una máquina de Turing.

Intuitivamente, podemos interpretar una máquina de Turing como cabeza lectora-inscriptora a través de la cual pasa una cinta que consta de una serie de casillas contiguas y es tan larga a derecha y a izaquierda como se desee. La cabeza lectora-inscriptora es capaz de imprimir un número finito de símbolos $s_0,\ s_1, \ldots,\ s_m$ y de estar en un número finito de estados $e_0,\ e_1, \ldots,\ e_n$. En un momento dado, la cabeza se encuentra sobre una casilla determinada que contiene un único símbolo s_j en un estado e_i y dependiendo de las instrucciones que posea realizará una de las siguientes acciones: moverse una casilla a la derecha, moverse una casilla a la izquierda, cambiar el símbolo s_j por s_k ó parar. Opcionalmente, en las tres primeras posibilidades variará su estado interno y continuará el proceso descrito.

Procedemos a dar la definición formal de máuina de Turing. Salvo que se indique lo contrario, trabajaremos con $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ conjunto finito cuyos elementos denominamos símbolos y con $E = \{e_0, \ldots, e_n\}$ conjunto finito cuyos elementos llamamos estados.

Necesitamos introducir previamente la noción de cuádruple:

Definición. Un **cuádruple** es una 4-tupla de uno de los tres tipos siguientes:

i) $e_i s_j s_k e_l$

ii) $e_i s_j D e_l$

iii) $e_i s_j I e_l$,

donde $e_i,\ e_l \in E$, $s_j,\ s_k \in S$ y D e I denotan derecha e izquierda, respectivamente.

Por abuso del lenguaje, hemos omitido el símbolo (, , ,), entendiendo que dos expresiones del tipo anterior son iguales si y sólo si tienen iguales sus componentes. Cada uno de estos cuádruples corresponden a un tipo de movimiento de la descripción intuitiva dada anteriormente. Esto es:

i) $e_i s_j s_k e_l$ se interpreta de la manera siguiente: al examinar el símbolo s_j en el estado e_i, borra el s_j, imprime s_k y entra en el estado e_l.

ii) $e_i s_j D e_l$ significa: cuando examines el símbolo s_j en el estado e_i, mueveté una casilla hacia la derecha y pasa al estado e_l.

iii) $e_is_jIe_l$ significa: cuando examines el símbolo s_j en el estado e_i, mueveté una casilla hacia la izquierda y pasa al estado e_l.

Dos cuádruples serán distintos cuando difieran en una de las componentes del mismo.

Definición. Sean $S = \{s_0, \ldots, s_m\}$, $E = \{e_0, \ldots, e_n\}$ y $\mathfrak{C}$ tres conjuntos finitos no vacíos cuyos elementos son símbolos, estados y cuádruples, respectivamente. Diremos que $\mathfrak{T} = (S, E, \mathfrak{C})$ es una **máquina de Turing** si $\mathfrak{C}$ satisface la propiedad siguiente: no existen dos cuádruples distintos en $\mathfrak{C}$ que comiencen por e_is_j para algunos $i \in \{0, \ldots, n\}$ y $j \in \{0, \ldots, m\}$.

Equivalentemente, una máquina de Turing consiste en dar una correspondencia

$$\begin{array}{rccc} f: & E \times S & \longrightarrow & (S \cup \{I, D\}) \times E \\ & (e_i, s_j) & \longmapsto & f(e_i, s_j) \end{array}$$

que cumple que a cada (e_i, s_j) le corresponde a lo sumo un $f(e_i, s_j)$.

Observemos que:

i) El conjunto imagen de esta correspondencia consiste de elementos del tipo (s_k, e_l), (D, e_l) ó (I, e_l).

ii) La correspondencia anterior no es en general una aplicación en el sentido que conocemos, puesto que no todos los elementos de $E \times S$ tienen una imagen por f.

La condición de que no existan dos cuádruples que comiencen con el mismo par de elementos de $E \times S$, esto es, para cada $(e_i,s_j) \in E \times S$ se verifica $|\{f(e_i,s_j)\}| \leq 1$, supone que en cada instante el movimiento a realizar por la máquina está totalmente determinado, no cabe ambigüedad sobre lo que tiene que hacer.

La máquina se parará si se encuentra en un estado e_i examinando un símbolo s_j y no existe ningún cuádruple que comience por e_is_j.

Ejemplo. Se consideran los conjuntos $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$ y $E = \{e_0, e_1, e_2\}$. Estos conjuntos junto con los siguientes cuádruples:

$$\mathfrak{C} = \{e_0s_0De_1, e_1s_1s_2e_2, e_0s_1Ie_2, e_2s_0Ie_2, e_0s_2Ie_1, e_2s_3s_1e_0\}$$

constituyen una máquina de Turing.

Interpretando la máquina anterior como una correspondencia tenemos:

$$\begin{array}{rccc} f: & E \times S & \longrightarrow & (S \cup \{I, D\}) \times E \\ & (e_0, s_0) & \longmapsto & (D, e_1) \\ & (e_0, s_1) & \longmapsto & (I, e_2) \\ & (e_0, s_2) & \longmapsto & (I, e_1) \\ & (e_1, s_1) & \longmapsto & (s_2, e_2) \\ & (e_2, s_0) & \longmapsto & (I, e_2) \\ & (e_2, s_3) & \longmapsto & (s_1, e_0) \end{array}$$

También podemos visualizar las acciones de una máquina de Turing mediante una tabla. Así, los cuádruples del ejemplo anterior vienen dados por:

	s_0	s_1	s_2	s_3
e_0	De_1	Ie_2	Ie_1	
e_1		s_2e_2		
e_2	Ie_2			s_1e_0

Para elaborar este cuadro hemos utilizado el siguiente criterio: Cuando la máquina se encuentre en el estado e_i examinando una casilla que lleve el símbolo s_j, en la casilla (i, j) correspondiente aparece el movimiento a realizar. Si no hay nada, significa que la máquina se para.

Del hecho de que para cada par (e_i, s_j) pueda haber a lo sumo un cuádruple que comience por él, se sigue que podemos contar el número de máquinas de Turing distintas que se pueden dar con un mismo conjunto de símbolos y estados, entendiendo que dos máquinas serán diferentes si presentan, al menos, un cuádruple distinto.

Teorema 2.1. *El número de máquinas de Turing diferentes que se pueden crear con m símbolos y n estados es* $(n(m+2)+1)^{nm} - 1$,