Tema 1: Semigrupos

5. Semigrupo libre de palabras.

Analizamos en este párrafo un tipo especial de semigrupos: los llamados semigrupos libres.

Definición. Sea $(F, .)$ un semigrupo y $\emptyset \neq B \subseteq F$. Se dice que F es **semigrupo libre** sobre B, si cada aplicación $f : B \to S$, donde S es un semigrupo arbitrario, se puede extenser de forma única a un homomorfismo $h : F \to S$, es decir,

$$\forall S \text{ semigrupo y } \forall f : B \to S \text{ aplicación}, \exists! h \in \mathrm{Hom}(F, S), \text{ tal que } h|_B = f.$$

Cuando F es un semigrupo libre sobre B, se suele decir que B es **base** de F.

En relación a este concepto, aparecen de forma inmediata diversas cuestiones, como por ejemplo, si todo semigrupo es semigrupo libre para alguna base B, o si dos bases de un mismo semigrupo libre deben tener el mismo cardinal. Con los siguientes resultados, vamos a ver que la respuesta a la primera cuestión es negativa y a la segunda afirmativa.

Teorema 5.1. *Sea F un semigrupo libre con base B. Entonces, $< B >= F$.*

Observación. El teorema anterior nos indica que el semigrupo libre con base B coincide con el semigrupo generado por B.

Otra cuestión que surge de manera inmediata es si dado cualquier subconjunto B podemos construir un semigrupo libre con base B.

Teorema 5.2. *Sea B un subconjunto no vacío. Entonces, existe F semigrupo libre con base B.*

Observación. El teorema anterior ha permitido describir cómo son los elementos y cómo operar en el semigrupo libre con base B. A esta operación se le suele llamar **concatenación**.

A continuación justificamos por qué hemos indicado "el" semigrupo libre y no "un" semigrupo libre.

Teorema 5.3. *Sean F y F' dos semigrupos libre de bases B y B', respectivamente. Entonces, F y F' son isomorfos si y solo si $|B| = |B'|$.*

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 5.4. *Dado un conjunto B no vacío, el semigrupo libre con base B es único, salvo isomorfismos.*

Corolario 5.5. *Si B y B' son dos bases para el semigrupo libre F, entonces $|B| = |B'|$.*

En lo que sigue, denotaremos por F_B el semigrupo libre con base B y a veces escribiremos F_β para denotar el semigrupo libre con base un conjunto B con β elementos. A sus elementos se les suele llamar **palabras** sobre el alfabeto B. Si además consideramos Λ la palabra vacía, denotaremos por Ω_B a $F_B \cup \{\Lambda\}$.

Hasta ahora los resultados vistos nos han permitido describir como es el semigrupo libre con base B. De esta descripción, podemos deducir que F_B es infinito, luego no existen semigrupos libres de cardinal finito. Por otro lado, si $|B| = 1$, sabemos que $F_B = \{b, b^2, b^3, \ldots\}$ y es posible establecer un isomorfismo entre F_B y el semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ (basta considerar $h : F_B \to \mathbb{N}$ definida por $h(b_k) = k$). En particular, F_B será conmutativo cuando $|B| = 1$. En cambio, si $|B| \geq 2$, como $b_1b_2 \neq b_2b_1$ si $b_1 \neq b_2$, podemos deducir que F_B no es conmutativo.

Otra de las características de los semigrupos libres es que cualquier semigrupo es la imagen homomorfa de un semigrupo libre, tal y como lo indica el siguiente resultado:

Teorema 5.6. *Sea S un semigrupo con sistema generador E y F el semigrupo libre con base E. Entonces, existe un epimorfismo $h : F_E \to S$.*

Por otro lado, los semigrupos libres nos sirven para describir los semigrupos en términos de generadores y relaciones:

Definición. Sea S un semigrupo generado por un conjunto X y $\equiv$ una relación de equivalencia definida sobre F_X tal que $S \cong F_X/\equiv$. Entonces, al par (X, R) se le llama **presentación de** S y a los elementos de R **relaciones definitorias de** S.

Ejemplo. Consideremos el semigrupo $(\mathbb{Z}_4, .)$. Sea $X = \{2, 3\}$ y $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Definimos la relación de equivalencia que se deduce de las siguientes igualdades: $x_2^3 = x_2$, $x_1x_2 = x_2x_1$, $x_2x_1 = x_1$, $x_1^2 = x_1^3$. Entonces, las clases de equivalencia vendrán dadas por $a_0 = [x_1^2]$, $a_1 = [x_2^2]$, $a_3 = [x_1]$ y $a_4 = [x_2]$. Entonces, si definimos en $F_X/\equiv$ la operación: $[y] * [z] = [yz]$, tenemos la siguiente tabla:

$\cdot$	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_0	a_0	a_0
a_1	a_0	a_1	a_2	a_2
a_2	a_0	a_2	a_0	a_2
a_3	a_0	a_3	a_2	a_1

Al comparar la tabla anterior con la que se obtiene para $(\mathbb{Z}_4, .)$, observamos que se puede establecer un isomorfismo ψ entre $(\mathbb{Z}_4, .)$ y $(F_X/\equiv, *)$, dado por $\psi(i) = a_i$.

Para finalizar este apartado, señalamos que se puede realizar una construcción análoga de monoides libres: basta reemplazar "semigrupo" por "monoide" en la definición de semigrupo libre. Además, empleando los mismos razonamientos, se puede demostrar que, salvo isomorfismos, existe un único monoide libre con base B, siendo B un conjunto no vacío y que cualquier monoide es imagen homomorfa de un monoide libre.