Tema 1: Semigrupos

2. Subsemigrupos.

Definición. Sea $(S, .)$ un semigrupo y $A \subseteq S$. Se dice que A es un **subsemigrupo** de S si $(A, ._{|A})$ es un semigrupo.

Cuando A sea subsemigrupo de S escribiremos: $A \leq S$.

Definición. Sea $(S, .)$ un monoide y $A \subseteq S$. Se dice que A es un **submonoide** de S si $(A, ._{|A})$ es un monoide.

Dado un semigrupo $(S, .)$ y $A \subseteq S$, si denotamos por A^2 al conjunto $\{a.b \mid a, b \in A\}$, podemos dar una caracterización equivalente del concepto de semigrupo. En efecto,

Proposición 2.1. *Sea $(S, .)$ un semigrupo y $A \subseteq S$. Entonces, A es subsemigrupo de S si y sólo si $A^2 \subseteq A$.*

Ejemplo. $(\mathbb{N}, +)$ es un subsemigrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

Como se observa en el ejemplo anterior, un subsemigrupo de un monoide no tiene que ser necesariamente submonoide. Más aún, si A es un submonoide del monoide S, puede suceder que tenga A y S elementos identidad distintos. Por ejemplo, $(\{0\}, .)$ es un submonoide de $(\mathbb{Z}, .)$. y el elemento neutro del primero es el 0 y del segundo 1.

Por otro lado, puede suceder que un semigrupo o un monoide tengan subsemigrupos que sean además grupos. Por ejemplo, en $(\mathbb{Z}, .)$ el subsemigrupo $(\{1, -1\}, .)$ es un grupo. Al subsemigrupo más grande que sea grupo lo llamaremos grupo de las unidades.

Definición. Sea $(S, .)$ un monoide. Al conjunto $G_S = \{s \in S \mid s \text{ es inversible}\}$ se le llama **grupo de las unidades de** $(S, .)$.

Es inmediato probar que G_S es un conjunto no vacío y que $(G_S, .)$ es un grupo. Cuanto mayor sea G_S más próximo está el monoide S de ser un grupo.

Ejemplo. En el monoide $S = \{f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f \text{ es aplicación}\}$ con la operación composición de aplicaciones ($f \circ g$ es la imagen por la operación del par (f, g)) el grupo de las unidades G_S viene dado por $G_S = \{f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$

Nos ocupamos ahora de estudiar que sucede con la intersección y unión de subsemigrupos.

Proposición 2.2. *Sea* $(S,.)$ *un semigrupo. Cualquier intersección de subsemigrupos no vacía es un subsemigrupo.*

En cambio, la unión de subsemigrupo no es necesariamente un subsemigrupo. Por ejemplo, si tomamos el semigrupo $(\mathbb{Z},.)$ y los subsemigrupos $S_1 = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $S_2 = \{1, -1\}$ resulta que $S_1 \cup S_2$ no es subsemigrupo de $(\mathbb{Z},.)$ ya que $-1.2^n \notin S_1 \cup S_2$.

Por otro lado, si $(S,.)$ es un semigrupo y $\emptyset \neq T \subseteq S$, podemos considerar todos los subsemigrupos de S que contengan a T. Entonces, según acabamos de ver, la intersección de éstos es un subsemigrupo, que además es el más pequeño que contiene a T. A este subsemigrupo se le llama **subsemigrupo generado por** T y lo denotaremos por $< T >$. Si $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ escribiremos $< t_1, \ldots, t_n >$ en lugar de $< \{t_1, \ldots, t_n\} >$ para denotar el subsemigrupo generado por T.

Es obvio que T es un subsemigrupo de $(S,.)$ si y sólo si $T =< T >$. Por otro lado, de la propia definición de $< T >$, se sigue que $T \subseteq< T >$. Además, si denotamos por $T^k = \{t_1 \ldots t_k \mid t_1, \ldots t_k \in T\}$, siendo $k \in \mathbb{N}$, podemos dar una caracterización de $< T >$:

Proposición 2.3. *Sea* $(S,.)$ *un semigrupo y* $\emptyset \neq T \subseteq S$. *Entonces,* $< T >= \cup_{n \in \mathbb{N}} T^n$.

Cada semigrupo $(S,.)$ verifica que $< S >= S$. Además, si T cumple $< T >= S$ (esto es T **genera a** S y $T \subseteq V \subseteq S$, es claro que $< V >= S$. Entonces, nos intersa buscar los subconjuntos T que sean lo más pequeños posibles y que generen a S.

Definición. Sea $(S,.)$ un semigrupo. Se dice que S está **finitamente generado** si existe T finito tal que T genere a S.

Definición. Sea $(S,.)$ un semigrupo. Se dice que S es **cíclico** si existe $t \in S$ tal que $< t >= S$.

Ejemplos.

(1) El semigrupo $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo cíclico ya que $< 1 >= \mathbb{N}$.

(2) El semigrupo $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ está finitamente generado ya que $< 0, 1 >= \mathbb{N}$ pero no es cíclico.

(3) El semigrupo $(\mathbb{N}, .)$ no es cíclico ni finitamente generado.