Tema 1: Semigrupos

1. Semigrupos: Conceptos fundamentales.

Recordemos que un **sistema algebraico** es un conjunto S con una o varias operaciones sobre él, siendo una **operación ó ley de composición interna** una aplicación de $S \times S$ en S. Usualmente, se denotan las operaciones mediante símbolos: $*, +$, etc. entendiendo que $a + b$ es al imagen del par $(a, b) \in S \times S$ mediante la operación definida $+$ en S.

Ejemplo. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, -)$ son ejemplos de sistemas algebraicos con una única operación.

Como es sabido, las operaciones pueden presentar diversas propiedades. Supongamos que $(S, .)$ es un sistema algebraico. Entonces, . puede verificar las siguientes propiedades:

(i) **Asociativa**: $\forall a, b, c \in S$, $(a.b).c = a.(b.c)$.

(ii) **Conmutativa**: $\forall a, b \in S$, $a.b = b.a$.

(iii) **Existencia de elemento neutro o identidad**: $\exists e \in S$ tal que $\forall a \in S$, $a.e = a = e.a$.

(iv) **Existencia de elemento opuesto o inverso**: $\forall a \in S$, $\exists a^{-1} \in S$, tal que $a.a^{-1} = e = a^{-1}.a$, donde e es el elemento nuetro de ..

Un elemento de un monoide se dice que es **inversible** si tiene elemento inverso.

A veces se suele hablar de elemento neutro a derecha o a izquierda. Así, un elemento $d \in S$ se dice que es un **elemento neutro a derecha** si para todo $x \in S$ se cumple $x.d = x$ y un elemento $l \in S$ se dice que es un **elemento neutro a izquierda** si para todo $x \in S$ se cumple $l.x = x$. Lo mismo sucede con los elementos inversos: si se cumple sólo una de las igualdades se dice que es un elemento inverso a derecha o a izquierda.

Definición. Sea $(S, .)$ un sistema algebraico. Se dice que $(S, .)$ es un **semigrupo** si . verifica la propiedad asociativa.

Un semigrupo $(S, .)$ se dice que es **conmutativo**, si . es conmutativa.

Un semigrupo $(S, .)$ se dice que es **monoide** si . tiene elemento neutro.

Un monoide $(S, .)$ se dice que es un **grupo**, si . verifica la existencia de elemento inverso para todo $a \in S$.

Ejemplos.

(1) $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo y $(\mathbb{Z}, -)$ no lo es.

(2) $(\mathbb{R}, *)$, donde $a * b = 2a + 2b$ no es un semigrupo.

(3) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ es un monoide conmutativo.

(4) $(S, *)$, donde $s_1 * s_2 = s_1$ para todo $s_1, s_2 \in S$, es un semigrupo que no tiene elemento identidad si $|S| \geq 2$.

Se dice que un semigrupo $(S, .)$ es finito si el conjunto S es finito.

Para los semigrupos finitos podemos construir la llamada **tabla del semigrupo** que viene dada por:

$\cdot$	s_1	s_2	$\dots$	s_n
s_1	$s_1 \cdot s_1$	$s_1 \cdot s_2$	$\dots$	$s_1 \cdot s_n$
s_2	$s_2 \cdot s_1$	$s_2 \cdot s_2$	$\dots$	$s_2 \cdot s_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
s_n	$s_n \cdot s_1$	$s_n \cdot s_2$	$\dots$	$s_n \cdot s_n$

En el caso de que S sea un monoide finito con $|S| \geq 2$ podemos extraer algunas consecuencias de su tabla: no aparecen dos filas ni dos columnas distintas iguales. Además, para localizar los posibles elementos neutros bastará con localizar aquellos elementos que verifiquen $s.s = s$, esto es los elementos **idempotentes** y entre éstos examinar si son o no elementos neutros.

En relación a los elementos idempotentes es fácil demostrar que en un grupo el único elemento idempotente es el elemento identidad. En cambio, en un semigrupo puede haber más de un elemento idempotente. Por ejemplo, si consideramos $(\mathbb{Z}, .)$ el elemento 0 es idempotente y no es el elemento identidad en este semigrupo.

Otros elementos interesantes en un sistema algebraico son los **elementos cero**

Definición. Sea $(S, .)$ un sistema algebraico y $s \in S$. Se dice que s es un **elemento cero a derecha** si para todo $x \in S$ se verifica $x.s = s$.

Definición. Sea $(S, .)$ un sistema algebraico y $s \in S$. Se dice que s es un **elemento cero a izquierda** si para todo $x \in S$ se verifica $s.x = s$.

Definición. Sea $(S, .)$ un sistema algebraico y $s \in S$. Se dice que s es un **elemento cero** si para todo $x \in S$ se verifica $x.s = s = s.x$.

Es inmediato demostrar:

Proposición 1.1. *Sea $(S, .)$ un sistema algebraico. Si $r \in S$ es un elemento cero a derecha y $l \in S$ es un elemento cero z izquierda, entonces $s = l$.*

Como consecuencia de esta proposición, se tiene:

Corolario 1.2. *Sea $(S, .)$ un sistema algebraico. Si existe un elemento cero, entonces éste es único.*

Por otro lado, es evidente que todo elemento cero de un semigrupo es un elemento idempotente.

Ejemplos.

(1) En el monoide $S = \{f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid f \text{ es aplicación}\}$ con la operación composición de aplicaciones ($f \circ g$ es la imagen por la operación del par (f, g))los elementos inversibles son las aplicaciones biyectivas. Existen elementos cero a izquierda son las aplicaciones constantes y tiene elementos idempotentes, como por ejemplo aplicaciones del tipo $f(x, y) = (x, c)$ donde c es una constante ó $f(x, y) = (c, y)$ ó las aplicaciones constantes.

(2) Sea S un conjunto no vacío. Si $\mathfrak{B}(S) = \{M \mid M \subseteq S\}$, sabemos que $(\mathfrak{B}(S), \cap)$ es un monoide con elemento neutro S y en el que todo elemento es idempotente. Además, $\emptyset$ verifica que es un elemento cero.

La siguiente construcción nos permite adjuntar un elemento cero y un elemento identidad a aquellos semigrupos que no los posean:

Teorema 1.3. *Sea $(S, .)$ un semigrupo sin elemento cero y $0 \notin S$. En $S' = S \cup \{0\}$ definimos la operación $*$ como sigue*

$$s * s' = \begin{cases} s.s', & \text{si } s, s' \in S; \\ 0 & \text{si } s = 0 \text{ ó } s' = 0. \end{cases}$$

Entonces, 0 es un elemento cero de $(S \cup \{0\}, *)$.

Teorema 1.4. *Sea* $(S, .)$ *un semigrupo sin elemento identidad y* $1 \notin S$. *En* $S' = S \cup \{1\}$ *definimos la operación* $*$ *como sigue*

$$s * s' = \begin{cases} s.s', & si\ s, s' \in S; \\ s & si\ s' = 1 \\ s' & si\ s = 1. \end{cases}$$

Entonces, 1 *es un elemento identidad de* $(S \cup \{1\}, *)$.