eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

MÉTODOS ESTADÍSTICOS DE LA INGENIERÍA

PRIMERA CONVOCATORIA 2011-2012

EJERCICIO 1

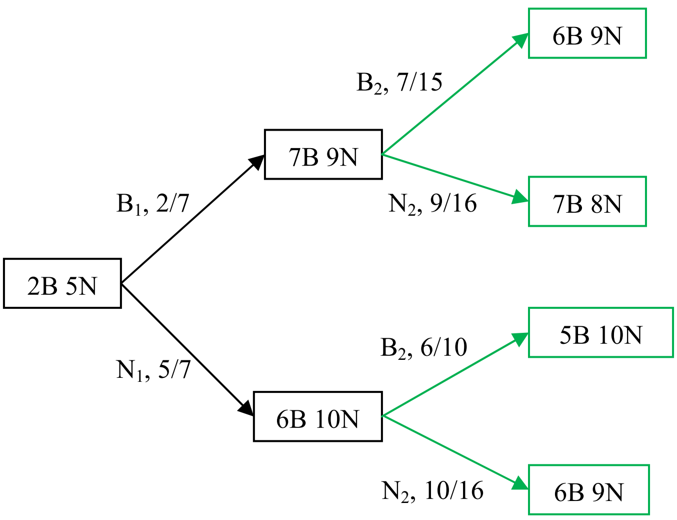
(1º) Calcular la probabilidad de que al lanzar dos dados la puntuación de uno de ellos sea menor que la del otro.

Usando el modelo de probabilidad clásico de Laplace:

$$\mathbb{P}(1^{\mathrm{o}}) = \frac{n_f}{n_\Omega} = \frac{2\sum_{i=1}^{5} i}{6^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0.8333$$

(2º) Una urna contiene 2 bolas blancas y 5 negras, y otra urna 6 blancas y 9 negras. Elegimos una bola al azar de la primera urna, y sin mirar su color, la pasamos a la segunda; a continuación, sacamos una bola al azar de la segunda urna. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

Sea los sucesos $B_i \triangleq$ "Sacar una bola blanca de la urna i = 1, 2" y $N_i \triangleq$ "Sacar una bola negra de la urna i = 1, 2". Un árbol binario, que muestra el despliegue del "enunciado propuesto", es:



Entonces se satisface que:

$$\mathsf{P}(B_2) = \mathsf{P}\left(B_2 \middle| B_1\right) + \mathsf{P}\left(B_2 \middle| N_1\right) = \mathsf{P}(B_1)\,\mathsf{P}\left(B_1 \cap B_2\right) + \mathsf{P}(N_1)\,\mathsf{P}\left(N_1 \cap B_2\right) =$$
$$= \frac{2}{7}\frac{7}{16} + \frac{5}{7}\frac{6}{16} = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{15}{7}\right) = \frac{22}{56} = 0.3929$$

(3º) Calcular la probabilidad de obtener 3 caras y dos cruces al lanzar 5 monedas equilibradas.

$$\mathbb{P}(3^{\text{o}}) \triangleq \mathbb{P}\left(X = 3\,caras\right) \equiv \mathbb{P}\left(X = 2\,cruces\right) \underset{\mathcal{B}(n=5,\ p=0.5)}{=} \binom{5}{3} 0.5^3 0.5^{5-3} = \binom{5}{3} 0.5^5 = 0.3125$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

EJERCICIO 2

Para contrastar la efectividad de una herramienta nueva en la realización de una tarea se ha pedido a 9 operarios que realicen la tarea con la herramienta nueva y la antigua. Se han medido los tiempos de realización en minutos y el resultado es el siguiente

	Operario								
Herramienta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antigua	39.5	35.4	35	41.3	44	32.9	37.7	41	38
Nueva	43.2	30.5	31.5	38	44.5	33	36.2	38.4	35

Los estadísticos muestrales son:

	A	N	PC
$\overline{x}$	38.3111	36.7000	1.6111
$\hat{s}$	3.5201	4.8731	2.6398

Se trata de un problema de pequeñas muestras (n < 30), dos poblaciones (dos poblaciones) y pares coincidentes (porque la herramienta se mide para cada operario).

(1º) Encuentra un intervalo de confianza de 95 % para la diferencia media de tiempos de realización de la tarea con ambas herramientas, suponiendo que las diferencias de tiempos se distribuyen aproximadamente de forma normal.

El estimador insesgado de varianza mínima es $\widehat{\mu_A - \mu_N} = \overline{x}_A - \overline{x}_N = 1.6111$. Y el error probable se calcula a partir de

$$\sigma_{\widehat{\mu_A - \mu_B}} = \frac{\hat{s}_{\bar{d}}}{\sqrt{n}} = \frac{2.6398}{\sqrt{9}} = 0.8799$$

Dado que se ha de estimar la media aritmética poblacional se utilizará la distribución de probabilidad t de Student

$$t_{\alpha,\upsilon} = t_{95\%,\,\upsilon=n-1=8\ gdl} \equiv t_{97.6\%,\,\upsilon=8} = 2.3060$$

El correspondiente intervalo de confianza es

$$\left[l,\mathcal{L}\right]=\widehat{\mu_A-\mu_N}\pm t_{\alpha,\upsilon}\sigma_{\widehat{\mu_A-\mu_N}}=1.6111\pm 2.3060\times 0.8799=\left[-0.4180,3.6402\right]$$

(2º) ¿Cuál tendría que ser el número de operarios si se desea que la desviación típica del estimador sea como máximo de 0.5 minutos?

La desviación típica del estimador viene dada por

$$t_{\alpha,\upsilon}\sigma_{\widehat{\mu_A-\mu_B}}=t_{\alpha,\upsilon}\frac{\hat{s}_{\bar{d}}}{\sqrt{n}}\le e_{\max}\Leftrightarrow n\ge\left(t_{\alpha,\upsilon}\frac{\hat{s}_{\bar{d}}}{e_{\max}}\right)^2=148.2248\Rightarrow n_{\min}=149\text{ operarios}$$

(3º) ¿Es el resultado de la prueba evidencia suficiente de que la herramienta nueva reduce al menos en un minuto el tiempo medio de realización de la tarea con un nivel de significación α = 5%?

En las condiciones dadas en el apartado (1º), el contraste de hipótesis que se ha de efectuar es

$$\begin{cases}H_0: & \mu_{A,0}-\mu_{N,0}=1\text{ minuto}\\ H_a: & \mu_A-\mu_N>1\text{ minuto}\end{cases}$$

contraste unilateral de cola superior, siendo el estadístico del contraste

$$t=\frac{\overline{x}_A-\overline{x}_N-\left(\mu_{A,0}-\mu_{N,0}\right)}{\sigma_{\widehat{\mu_A-\mu_B}}}=\frac{1.6111-1}{0.8799}=0.6945$$

Y el valor crítico del contraste

$$t_c=t_{95\%,\,\upsilon=n-1=8\,gdl}=1.8596$$

Como $t<t_c$ se concluye que a partir de las muestras del enunciado no existe evidencia suficiente para establecer que la herramienta nueva reduce al menos en un minuto el tiempo medio de realización de la tarea con un nivel de significación α = 5%

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

<u>EJERCICIO 3</u>

El 30% de los productos de una empresa es destinado a la exportación. Aleatoriamente se toman 200 productos de dicha empresa.

Se trata de una variable aleatoria binomial: n = 200 ensayos de Bernouilli independientes (productos distintos) con probabilidad p = 0.30. Es decir, la variable aleatoria X ≜ "número de productos destinados a la exportación" $\Leftrightarrow \mathcal{B}(n = 200, p = 0.30)$.

(1º) Determinar cuál es la media y la desviación típica de los productos a exportar.

Se tiene que el valor esperado o esperanza matemática es $\mu = np = 60$ productos (es decir, se espera que en promedio se exporten 60 productos de ese lote seleccionado) y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = 6.4807$ productos.

(2º) Hallar la probabilidad de que se exporten 60 productos.

Se pide calcular $\mathbb{P}(X = 60) = \binom{200}{60} 0.3^{60} 0.7^{100-60} = \binom{200}{60} 0.3^{60} 0.7^{40}$, pero no es sencillo operacionalmente. Para ello, se puede aproximar

$$\mathcal{B}(n=200,\ p=0.30) \rightarrow \mathcal{N}(\mu=60, \sigma=6.4807)$$

porque $np = 60 > 4$ y $nq = 140 \gg 4$, y teniendo en cuenta la corrección por continuidad

$$\mathbb{P}(X = 60) \approx \mathbb{P}(x_1 = 59.5 \leq X \leq x_2 = 60.5) \underset{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}}{=} \mathbb{P}(z_1 = -0.07715 \leq Z \leq z_2 = 0.07715) =$$

$$2\left[\mathbb{P}(Z \leq z_2 = 0.07715) - 0.5\right] \underset{\text{interpolando}}{=} 2\left[0.53075 - 0.5\right] = 2 \times 0.03075 = 0.06150$$

(3º) ¿Cuál es la probabilidad de que se exporten al menos 40 y a lo más 70 productos?

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

Ahora se pide calcular la probabilidad $\mathrm{P}(40 \le X \le 70)$. Se procede como en el apartado anterior:

$$\mathbb{P}(x_1 = 39.5 \le X \le x_2 = 70.5) \underset{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}}{=} \mathbb{P}(z_1 = -3.1632 \le Z \le z_2 = 1.6202) \underset{\text{interpolando}}{=}$$

$$\mathbb{P}(Z \le z_2 = 1.6202) - \left[1 - \mathbb{P}(Z \le |z_1| = 3.1632)\right] = 0.947405339\text{-}(1\text{-}0.999219775) = 0.9466$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial
Universidad del País Vasco
Plaza de la Casilla, 3
48012 Bilbao

EJERCICIO 2

Un estudio efectuado sobre 240 muestras de aceros especiales, aleados con manganeso, de una calidad determinada ha proporcionado los resultados en % Mn (p/p): $\overline{x} = 1.35\%,\ \hat{s} = 0.21\%$. Para hacer otros análisis, el Departamento de Calidad de una cierta empresa, desea establecer una escala cualitativa donde los posibles valores de manganeso queden clasificados según los siguientes criterios: I – valores excesivamente bajos: 5 % inferior; II – valores bajos aceptables: 20 % siguiente; III – valores aceptables: 50 % central; IV – valores altos aceptables: 20 % siguiente; V – valores excesivamente altos: 5 % superior. Determina:

(1º) Los límites de concentración de Mn derivados de la anterior clasificación.

Se nos ha dado de forma indirecta una tabla de frecuencias. Supondremos que la muestra está distribuida normalmente. Entonces:

$$z = \frac{x - \overline{x}}{\hat{s}} \Leftrightarrow x = \overline{x} + z \cdot \hat{s}$$

La forma de trabajar será obtener el límite inferior y superior de cada intervalo de clase para lo que se utilizará la probabilidad de referencia. Por ejemplo, la zona I (valores excesivamente bajos) corresponde al 5% inferior, con lo que la puntuación tipificada asociada será tal que

$$\mathbb{P}(Z \le z_1) = 0.05 \underset{simetria}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(Z \le |z_1|) = 0.95 \Rightarrow z_1 \underset{\text{int}\,erpolando}{=} -1.644853627$$

$$\mathbb{P}(z_1 \le Z \le z_2) = 0.20 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \le z_2) = 0.25 \underset{simetria}{\Leftrightarrow} \mathbb{P}(Z \le |z_2|) = 0.75 \Rightarrow z_2 \underset{interpolando}{=} \text{-}0.67448975$$

$$\mathbb{P}(z_2 \le Z \le z_3) = 0.50 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \le z_3) = 0.75 \underset{simetria}{\Leftrightarrow} z_3 = -z_2 = 0.67448975$$

$$\mathbb{P}(z_3 \le Z \le z_4) = 0.20 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \le z_4) = 0.95 \underset{simetria}{\Leftrightarrow} z_4 = -z_2 = 1.644853627$$

De esta forma la tabla de frecuencias en términos de concentración de manganeso será

CLASE	DEFINICIÓN	$\ell_i(\%)$	$\mathcal{L}_i(\%)$	$x_i(\%)$	f_i
I	**5%**	0	1.004581	0.502291	12
II	**20%**	1.004581	1.208357	1.106469	48
III	**50%**	1.208357	1.491643	1.812535	120
IV	**20%**	1.491643	1.695419	2.095821	48
V	**5%**	1.695419	∞	2.299597	12

(2º) Los valores que concentración de Mn que limitan el 50 % de valores centrales del estudio realizado. ¿Qué estadístico muestral se acaba de determinar? ¿Qué información adicional se puede deducir de este resultado, sin hacer más cálculos adicionales?

De la información proporcionada se deduce que el intervalo central que contiene el 50 % de los valores centrales de la muestra es el intervalo [1.208357, 1.491643], que corresponde al rango intercuartílico, con lo que de forma indirecta se dispone de los cuartiles:

$$Q_1 = 1.208357\% \text{ y } Q_3 = 1.491643\%$$

(3º) ¿Qué probabilidad hay de que un valor supere el 1.63%?

$$\mathbb{P}(X \geq 1.63) = \mathbb{P}\left(Z \geq z_1 = \frac{1.63 - 1.35}{0.21}\right) = \mathbb{P}(Z \geq z_1 = 1.3333) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq z_1 = 1.3333) =$$
$$= 1 - 0.908788726 = 9.1211274\%$$