UNIDAD TEMÁTICA 4 Lección 7
DISTRIBUCIONES MUESTRALES

ENUNCIADO 1

Sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas de dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 de poblaciones normales con varianzas S_1^2 y S_2^2, respectivamente. Demostrar que la variable aleatoria definida por

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2}$$

tiene una distribución F con $n_1 - 1$ grados de libertad en el numerador, y $n_2 - 1$ grados de libertad en denominador.

Resolución:

Sean $Y = \frac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma_1^2}$ y $T = \frac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma_2^2}$. Entonces, se deduce que:

$$F = \frac{Y / (n_1 - 1)}{T / (n_2 - 1)} = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2}$$

Se puede demostrar que si Y y Z son dos variables aleatorias independientes con distribuciones de probabiliad χ^2 con n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente, entonces $X = \frac{Y / n_1}{Z / n_2}$ es una variable aleatoria con distribución F_{n_1, n_2}. Así, de dicho resultado las dos muestras aleatorias (es decir, Y y T) son independientes; equivalentemente, los $(n_1 + n_2)$ elementos de las dos muestras son entre sçi variables aleatorias independientes. En consecuencia, Y y T son variables aleatorias independientes, y el resultado queda demostrado.

ENUNCIADO 2

Mostrar que para muestras aleatorias de tamaño n de una población normal con varianza σ^2, *la distribución muestral de* S^2 *tiene de media* σ^2 *y de varianza* $\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

Resolución:

Se sabe $Y = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$, ello implica $E[Y] = n-1$ y $\operatorname{var}[Y] = 2(n-1)$.

Además, $S^2 = \dfrac{\sigma^2 Y}{n-1}$ y por tanto se tiene

$$E\left[S^2\right] = E\left[\frac{\sigma^2 Y}{n-1}\right] = \frac{\sigma^2}{n-1} E[Y] = \sigma^2$$

y

$$\operatorname{var}\left[S^2\right] = \operatorname{var}\left[\frac{\sigma^2 Y}{n-1}\right] = \frac{\sigma^2}{n-1} \operatorname{var}[Y] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

como se quería comprobar.