



# Tema 5

Dpto. Economía Aplicada III (Econometría y Estadística)

# Objetivos de aprendizaje

- Estimar un modelo econométrico a partir de la información muestral disponible.
- Interpretar los coeficientes estimados de un modelo de regresión lineal general.
- Conocer las propiedades de la función de regresión muestral.
- Interpretar diferentes medidas de la bondad de ajuste.
- Estimar un modelo econométrico sujeto a información extra muestral.
- Conocer las propiedades del estimador MCO bajo distintos escenarios.

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Estimación del MRLG.

## Objetivo.

Estimar un modelo de regresión lineal general:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad u_i | X \sim iid N(0, \sigma^2)$$

a partir de la información muestral disponible.

- $Y$ : variable a explicar o endógena.
- $X_j, j = 2, \dots, k$ : regresores (variables explicativas cuantitativas, ficticias u otros términos).
- $\beta$ : coeficientes a estimar.
- $u$ : perturbación aleatoria no observable.
- $i$ : subíndice empleado con datos de sección cruzada (con datos de series temporales  $t$ ).
- $N$ : tamaño muestral (en series temporales  $T$ ).

# Estimación del MRLG.

## Modelo de regresión lineal general.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad u_i | X \sim iid N(0, \sigma^2)$$

### Algunas aclaraciones:

- A lo largo de la exposición teórica sobre la estimación del modelo, se va a trabajar con esta expresión del modelo de regresión lineal general para facilitar la notación, las demostraciones y los cálculos.
- Esta especificación engloba todos los modelos lineales en los coeficientes, vistos hasta el momento.
- $X_j, j = 2, \dots, k$ , puede denotar una variable explicativa cuantitativa, alguna transformación (cuadrática, logarítmica, ...) de la misma, una variable ficticia, productos de variables, ...
- La interpretación de los coeficientes depende de lo que represente  $X_j$ .

# Estimación del MRLG.

El modelo de regresión lineal general:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

Escrito para cada observación:

$$\left\{ \begin{array}{lll} Y_1 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \dots + \beta_k X_{k1} + u_1 \quad i = 1 \\ Y_2 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \dots + \beta_k X_{k2} + u_2 \quad i = 2 \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Y_i & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = i \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Y_N & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2N} + \beta_3 X_{3N} + \dots + \beta_k X_{kN} + u_N \quad i = N \end{array} \right.$$

# Estimación del MRLG.

Con el objeto de facilitar algunas expresiones así como para las demostraciones de interés, trabajaremos con la expresión matricial del modelo.

## Expresión matricial del MRLG.

$$Y = X\beta + u$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \cdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2i} & X_{3i} & \cdots & X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2N} & X_{3N} & \cdots & X_{kN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$



# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).**
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

Se quiere estimar los coeficientes desconocidos de la **Función de Regresión Poblacional** que recoge el comportamiento medio de la variable endógena en función de los regresores:

$$E_X(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}$$

Estimados los coeficientes desconocidos, se obtiene la **Función de Regresión Muestral (FRM)**:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$

El error de estimación cometido se denomina **residuo**:

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = \hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}$$

que depende tanto de la perturbación como del error que se comete al estimar los coeficientes

$$\hat{u}_i = u_i + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) + \dots + (\beta_k - \hat{\beta}_k) X_{ki}$$

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

## El estimador MCO.

El estimador de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) se obtiene minimizando la siguiente función objetivo:

$$\min_{\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = \min_{\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k} \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2$$

## Condiciones de primer orden de minimización.

Las primeras derivadas de la función objetivo respecto de los coeficiente a estimar han de ser cero:

$$\left. \frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} \right|_{\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^{MCO}} = 0, \quad \dots, \quad \left. \frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_k} \right|_{\hat{\beta}_k = \hat{\beta}_k^{MCO}} = 0$$

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

Las condiciones de primer orden que se obtienen son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} \Big|_{\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1^{MCO}} &= -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} \Big|_{\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_2^{MCO}} &= -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{2i} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_k} \Big|_{\hat{\beta}_k = \hat{\beta}_k^{MCO}} &= -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{ki} = 0\end{aligned}$$

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

## Ecuaciones normales.

Al conjunto de ecuaciones que obtenemos de las condiciones de primer orden de la minimización se les denomina ecuaciones normales.

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{2i} X_{ki} \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sum X_{ki} Y_i &= \hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum X_{ki} X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2.\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden proporcionan un sistema de  $k$  ecuaciones con  $k$  incógnitas. El estimador MCO de los coeficientes se obtiene resolviendo este sistema de ecuaciones.

Dadas las condiciones de segundo orden, podemos afirmar que se trata de un mínimo.

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

## El estimador MCO en forma matricial.

**Función objetivo:**  $\min_{\hat{\beta}} \hat{u}'\hat{u} = \min_{\hat{\beta}} (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}).$

**Condiciones de primer orden:**

$$\left. \frac{\partial \hat{u}'\hat{u}}{\partial \hat{\beta}} \right|_{\hat{\beta}=\hat{\beta}_{MCO}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2X'(Y - X\hat{\beta}_{MCO}) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'\hat{u}_{MCO} = 0.$$

**Ecuaciones normales:**  $X'Y = X'X\hat{\beta}_{MCO}. \quad (2)$

**Condiciones de segundo orden:**

$$\left. \frac{\partial \hat{u}'\hat{u}}{\partial \hat{\beta} \partial \hat{\beta}'} \right|_{\hat{\beta}=\hat{\beta}_{MCO}} = 2X'X \quad \text{matriz semidefinida positiva siempre.}$$

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

## Estimador MCO.

Despejando las ecuaciones normales (2) se obtiene el estimador MCO:

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$X'X = \begin{bmatrix} N & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \cdots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \cdots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \cdots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \\ \sum X_{3i}Y_i \\ \vdots \\ \sum X_{ki}Y_i \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

Aplicaciones en el **Ejemplo 5.1** y en el **Ejemplo 5.2**.

# Estimación del MRLG: el estimador MCO.

Dado que vamos a trabajar indistintamente en forma matricial y no matricial, presentamos algunas equivalencias matriciales que pueden ser de interés.

## Observación $i$

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_K X_{Ki} + u_i$$

$$E_X(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_K X_{Ki}$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_K X_{Ki}$$

$$u_i = Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_{2i} - \dots - \beta_K X_{Ki}$$

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_K X_{Ki}$$

$$\hat{u}_i = u_i + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) + \dots + (\beta_K - \hat{\beta}_K) X_{Ki}$$

## Matricialmente

$$Y = X\beta + u$$

$$E_X(Y) = X\beta$$

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

$$U = Y - X\beta$$

$$\hat{U} = Y - \hat{Y}$$

$$\hat{U} = Y - X\hat{\beta}$$

$$\hat{U} = U + X(\beta - \hat{\beta})$$



# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).**
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Estimación del MRLG: FRM.

**Propiedades de la FRM:**  $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}$

1. La suma de los residuos es cero:  $\sum_{i=1}^N \hat{u}_i = 0$ .
2. Los residuos son ortogonales a los regresores:  $\sum_{i=1}^N \hat{u}_i X_{ji} = 0$

## Demostración:

De las ecuaciones normales (2) se tiene que:

$$X'(Y - X\hat{\beta}) = X'\hat{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sum_1^N \hat{u}_i \\ \sum_1^N X_{2i} \hat{u}_i \\ \sum_1^N X_{3i} \hat{u}_i \\ \vdots \\ \sum_1^N X_{ki} \hat{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N \hat{u}_i X_{ji} = 0, \forall j \end{cases}$$

## Estimación del MRLG: FRM.

3. Los residuos son ortogonales a la variable endógena estimada:  $\hat{Y}'\hat{u} = 0$ .

Demostración:

$$\hat{Y}'\hat{u} = (X\hat{\beta})'\hat{u} = \hat{\beta}' \underbrace{X'\hat{u}}_{=0} = 0$$

4. Las medias muestrales  $Y$  y  $\hat{Y}$  son iguales:  $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$ .

Demostración:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i &\iff Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i \\ \sum Y_i &= \sum \hat{Y}_i + \underbrace{\sum \hat{u}_i}_{=0} \\ \frac{1}{N} \sum Y_i &= \frac{1}{N} \sum \hat{Y}_i \Rightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}}\end{aligned}$$

# Estimación del MRLG: FRM

5. La FRM pasa por el vector de medias  $(\bar{Y}, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k)$ .

Demostración:

$$\sum_{i=1}^N \hat{u}_i = 0 \Leftrightarrow \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) = 0$$

$$\sum Y_i - N\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} - \dots - \hat{\beta}_k \sum X_{ki} = 0$$

$$\sum Y_i = N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ki}$$

$$\frac{1}{N} \sum Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \frac{1}{N} \sum X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \frac{1}{N} \sum X_{ki}$$

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \dots + \hat{\beta}_k \bar{X}_k$$

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.**
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Estimación del MRLG: propiedades del estimador MCO.

## Propiedades del estimador MCO: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$

1. **Linealidad:** condicionado a  $X$ , el estimador MCO es una combinación lineal de la variable endógena  $Y$  y, por tanto, es también una combinación lineal de las perturbaciones.

### Demostración:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u) = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$

2. **Insesgadez:** como  $E_X(u) = 0$ ,  $\hat{\beta}_{MCO}$  es insesgado, es decir, su valor esperado es igual al verdadero valor de los coeficientes del modelo.

### Demostración:

$$E_X(\hat{\beta}) = E_X(\beta + (X'X)^{-1}X'u) = \beta + (X'X)^{-1}X'E_X(u) = \beta$$

# Estimación del MRLG: propiedades del estimador MCO.

## 3. Varianza:

$$\begin{aligned} V(\hat{\beta}) &= E_X[(\hat{\beta} - E_X(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E_X(\hat{\beta}))'] = \\ &= \begin{bmatrix} V(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & V(\hat{\beta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & V(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} = \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned}$$

## Demostración

$$\begin{aligned} V_X(\hat{\beta}) &= E_X[(\hat{\beta} - E_X(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E_X(\hat{\beta}))'] = E_X[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = \\ &= E_X \left[ \left[ (X'X)^{-1} X' u \right] \left[ (X'X)^{-1} X' u \right]' \right] = \\ &= (X'X)^{-1} X' E_X[uu'] X (X'X)^{-1} = (X'X)^{-1} X' \sigma^2 I_T X (X'X)^{-1} = \\ &= \sigma^2 (X'X)^{-1} X' X (X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{aligned}$$

# Estimación del MRLG: propiedades del estimador MCO.

Esta **varianza es mínima** entre la clase de estimadores lineales e insesgados.

## Teorema de Gauss-Markov

Dados los supuestos básicos del modelo de regresión lineal general, S.1 a S.5

“el estimador MCO,  $\hat{\beta}_{MCO}$ , es el estimador eficiente, es decir,  $\hat{\beta}_{MCO}$  tiene mínima varianza dentro de la clase de estimadores lineales e insesgados”.

Nota: Dado que las variables  $X$  son estocásticas, todo el análisis de las propiedades de los estimadores y sus distribuciones está condicionado a  $X$ , aunque por simplificar la notación, no se haga explícito en adelante.



# Estimación del MRLG.

Estimador de la varianza de la perturbación  $\sigma^2$ .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{N - k} = \frac{SCR}{N - k} = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N - k}$$

## Demostración:

El estimador de la varianza de la perturbación es insesgado:

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{E(\hat{u}'\hat{u})}{N - k} = \frac{\sigma^2(N - k)}{N - k} = \sigma^2$$

Dado que:

$$\begin{aligned} E(\hat{u}'\hat{u}) &= E(u'Mu) = E(\text{tr}(u'Mu)) = E(\text{tr}(Mu u')) = \\ &= \text{tr}(E(Mu u')) = \text{tr}(ME(uu')) = \text{tr}(M\sigma^2 I_N) = \\ &= \sigma^2 \text{tr}(M) = \sigma^2(N - k) \end{aligned}$$

Estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de  $\hat{\beta}_{MCO}$ .

$$\widehat{V}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \widehat{V}(\hat{\beta}_1) & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \cdots & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \widehat{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \widehat{V}(\hat{\beta}_2) & \cdots & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \widehat{Cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \cdots & \widehat{V}(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix} = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$$

# Estimación del MRLG.

## Residuos MCO.

Los residuos MCO se pueden escribir en función de las perturbaciones:

$$\hat{u} = Mu$$

donde  $M$  es una matriz cuadrada de orden  $N$ , simétrica ( $M = M'$ ), idempotente ( $MM = M$ ), con rango  $\text{rg}(M) = \text{tr}(M) = N - K$  y ortogonal a  $X$  ( $MX = 0$ ).

## Demostración:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta} = Y - X(X'X)^{-1}X'Y = \\ &= [I_N - X(X'X)^{-1}X']Y = [I_N - X(X'X)^{-1}X'](X\beta + u) = \\ &= X\beta - X(X'X)^{-1}X'X\beta + [I_N - X(X'X)^{-1}X']u = \\ &= \underbrace{[I_N - X(X'X)^{-1}X']}_{=M} u = Mu\end{aligned}$$

# Estimación del MRLG: propiedades.

## Propiedades de los residuos MCO: $\hat{u} = Mu$

1. Media: los residuos tienen media cero.

### Demostración:

$$E(\hat{u}) = ME(u) = M 0 = 0$$

2. Varianza: Aunque las perturbaciones sean homocedásticas y estén incorrelacionadas ( $u \sim (0, \sigma^2 I)$ ), los residuos MCO **no** son homocedásticos y están correlacionados.

### Demostración:

$$\begin{aligned} V(\hat{u}) &= E(\hat{u}\hat{u}') = E(Muu'M') = ME(uu')M' = \\ &= M\sigma^2 I_N M = \sigma^2 M \rightarrow M \neq I \end{aligned}$$

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.**
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Estimación del MRLG: valoración.

## Descomposición de la sumas de cuadrados.

$$SCT = SCE + SCR$$

$SCT$ : Suma de Cuadrados Total

$SCE$ : Suma de Cuadrados Explicada

$SCR$ : suma de Cuadrados Residual

Analíticamente:

$$SCT = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = Y'Y - N\bar{Y}^2$$

$$SCE = \sum (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2 = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - N\bar{\hat{Y}}^2$$

$$SCR = \sum \hat{u}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \hat{u}'\hat{u} = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

# Estimación del MRLG: valoración.

## Medidas de bondad de ajuste.

**Coeficiente de determinación:**  $R^2 = \frac{SCE}{SCT}$

$R^2$  mide la proporción de la variación de la variable endógena en la muestra explicada por las variaciones de las variables explicativas de forma lineal.

Siempre que el modelo tenga término independiente, se puede calcular también como:  $R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \in (0, 1)$

¡¡ Gretl lo calcula de esta última forma!!

**Coeficiente de determinación corregido:**  $\bar{R}^2 = 1 - \frac{N-1}{N-k} R^2$

Es una medida del ajuste de la regresión en la misma línea que el coeficiente de determinación. Sin embargo, esta medida ajusta por los grados de libertad de los modelos y carece de interpretación.

# Estimación del MRLG: valoración.

## Criterios de error.

Los siguientes criterios ajustan la suma de residuos al cuadrado por los grados de libertad.

**Log-verosimilitud:**  $\ell(\hat{\theta}) = \frac{N}{2}(1 + \ln 2\pi - \ln N) - \frac{N}{2} \ln SCR$

**Criterio de Akaike:**  $AIC = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k$

**Criterio de Schwarz:**  $BIC = -2\ell(\hat{\theta}) + k \ln N$

**Hannan-Quinn:**  $HQC = -2\ell(\hat{\theta}) + 2k \ln \ln N$

Dado que se trata de criterios de error, cuanto menor sea el valor del criterio, más adecuado será el modelo siempre y cuando estemos tratando con modelos anidados. Son criterios útiles para comparar modelos.



# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).**
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Estimación del MRLG: Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).

## Objetivo.

Estimar un modelo de regresión lineal general:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad u_i | X \sim iid N(0, \sigma_u^2)$$

teniendo en cuenta información adicional sobre los coeficientes.

El estimador Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR) es

$$\hat{\beta}_{MCR} = (X'_R X_R)^{-1} X'_R Y_R$$

donde  $X_R$  y  $Y_R$  son la matriz de datos y la variable a explicar del modelo restringido, es decir, el modelo resultante de incorporar la información adicional en el modelo.

Aplicación en el **Ejemplo 5.3.**

## Propiedades.

$$\hat{\beta}_{MCR} = (X'_R X_R)^{-1} X'_R Y_R$$

Condicionado a  $X$ , el estimador MCR:

- Es lineal en  $u$ .
- Es insesgado si la información extramuestral incorporada es real.
- Posee menor varianza que el estimador MCO, independientemente de si la información extramuestral incorporada es real o no.

En consecuencia, si la información extramuestral que disponemos es real, optaremos por estimar el modelo empleando el estimador MCR, dado que entre dos estimadores lineales e insesgados preferimos el que tiene menor varianza.

# Estimación del MRLG: MCR.

## Ejemplo 1.

Se quiere estimar el modelo:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2 renta_i + \beta_3 edad_i + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

sujeto a la información:  $\beta_2 = -\beta_3$

**Modelo restringido:**

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2(renta_i - edad_i) + u_i$$

$$X_R = \begin{pmatrix} 1 & renta_1 - edad_1 \\ 1 & renta_2 - edad_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & renta_N - edad_N \end{pmatrix} \quad Y_R = \begin{pmatrix} pizza_1 \\ pizza_2 \\ \vdots \\ pizza_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{MCR} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta}_3^{MCR} = -\hat{\beta}_2^{MCR}$$

# Estimación del MRLG: MCR.

## Ejemplo 2.

Se quiere estimar el modelo:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2 renta_i + \beta_3 edad_i renta_i + u_i \quad i = 1, \dots, N$$

sujeto a la información:  $\beta_2 = 5$

**Modelo restringido:**

$$pizza_i - 5renta_i = \beta_1 + \beta_3 edad_i renta_i + u_i$$

$$X_R = \begin{pmatrix} 1 & edad_1 \times renta_1 \\ 1 & edad_2 \times renta_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & edad_N \times renta_N \end{pmatrix} \quad Y_R = \begin{pmatrix} pizza_1 - 5renta_1 \\ pizza_2 - 5renta_2 \\ \vdots \\ pizza_N - 5renta_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{MCR} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta}_2^{MCR} = 5$$

# Estimación del MRLG: MCR.

## Ejemplo 3.

Se quiere estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \quad t = 1, \dots, T$$

sujeto a la información:  $\beta_3 + \beta_4 = 1$

**Modelo restringido:**  $Y_t - X_{4t} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 - (X_{3t} - X_{4t}) + u_t$

$$X_R = \begin{pmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} - X_{41} \\ 1 & X_{22} & X_{32} - X_{42} \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & X_{2T} & X_{3T} - X_{4T} \end{pmatrix} \quad Y_R = \begin{pmatrix} Y_1 - X_{41} \\ Y_2 - X_{42} \\ \vdots \\ Y_T - X_{4T} \end{pmatrix}$$
$$\hat{\beta}_{MCR} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_4 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta}_4^{MCR} = 1 - \hat{\beta}_3^{MCR}$$

# Estimación del MRLG: MCR.

## Ejemplo 4.

Se quiere estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X3_t + \beta_3 X3_t^2 + \beta_4 time + u_t$$

sujeto a la información:  $\beta_2 = \beta_3 = 0$

**Modelo restringido:**

$$Y_t = \beta_1 + \beta_4 time + u_t$$

$$X_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix} \quad Y_R = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_T \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta}_{MCR} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_4 \end{pmatrix} \quad \hat{\beta}_2^{MCR} = \hat{\beta}_3^{MCR} = 0$$

# Estimación del MRLG: MCR.

## Omisión de variable relevante.

Si en el modelo de regresión lineal general:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

omitimos  $X_2$  que es una variable relevante, es decir, incorporamos la restricción falsa de que  $\beta_2 = 0$  y estimamos el modelo restringido

$$Y_i = \beta_1 + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

entonces, el estimador MCR,  $\hat{\beta}_{MCR} = (X'_R X_R)^{-1} X'_R Y_R$ , tendrá las siguientes propiedades, condicionado a  $X$ :

- Lineal en  $u$ .
- SESEGADO porque la información incorporada NO es real.
- De menor varianza que el estimador MCO.



# Estimación del MRLG: MCR.

## Inclusión de variable irrelevante.

Si en el modelo de regresión:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

sabemos que se cumple  $\beta_2 = 0$ , es decir, que el regresor  $X_2$  es irrelevante, pero no lo incorporamos a la estimación del modelo, entonces el estimador MCO

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

tendrá las siguientes propiedades, condicionado a  $X$ :

- Lineal en  $u$ .
- Insesgado.
- De varianza mínima entre los estimadores lineales e insesgados.

PERO podríamos reducir la varianza si incorporáramos la restricción  $\beta_2 = 0$  y estimáramos el modelo por MCR.

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.**
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Resultados de estimación.

## Ejemplo. Consumo de pizza.

En el fichero `pizza.gdt` contamos con información sobre el consumo anual de pizza (en dólares) de  $N$  individuos, así como sobre algunas características de los mismos:

- Renta anual (en miles de dólares).
- Edad del consumidor (en años).
- Género (hombre, mujer).
- Nivel de estudios (básicos, bachillerato, universitario, postgrado)

El análisis de los factores que influyen en el consumo de pizza será tratado con detalle en el **Ejemplo 5.1**. En este momento, vamos a estimar un modelo sencillo, en el que el consumo depende exclusivamente de la renta y la edad, con el fin de explicar el output de estimación de Gretl.

# Resultados de estimación.

Modelo de regresión lineal general propuesto:

$$pizza_i = \beta_1 + \beta_2 renta_i + \beta_3 edad_i + u_i \quad i = 1, \dots, N$$

donde, en términos de la especificación general del MRLG, se tiene:

- $pizza_i$ : variable a explicar (consumo de pizza).
- $renta_i$ : variable explicativa cuantitativa.
- $edad_i$ : variable explicativa cuantitativa.
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ : coeficientes a estimar.
- $u_i$ : perturbación aleatoria.
- $N$ : número de individuos en la muestra.

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1–40

Variable dependiente: pizza

|                        | Coeficiente | Desv. Típica | Estadístico $t$       | Valor $p$ |
|------------------------|-------------|--------------|-----------------------|-----------|
| const                  | 342,885     | 72,3434      | 4,7397                | 0,0000    |
| renta                  | 1,83248     | 0,464301     | 3,9467                | 0,0003    |
| edad                   | −7,57556    | 2,31699      | −3,2696               | 0,0023    |
| Media de la vble. dep. |             | 191,5500     | D.T. de la vble. dep. | 155,8806  |
| Suma de cuad. residuos |             | 635636,7     | D.T. de la regresión  | 131,0701  |
| $R^2$                  |             | 0,329251     | $R^2$ corregido       | 0,292994  |
| $F(2, 37)$             |             | 9,081100     | Valor $p$ (de $F$ )   | 0,000619  |
| Log-verosimilitud      |             | −250,2276    | Criterio de Akaike    | 506,4552  |
| Criterio de Schwarz    |             | 511,5218     | Hannan–Quinn          | 508,2871  |

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1–40  
Variable dependiente: pizza

En la cabecera del output que proporciona Gretl se observa la siguiente información:

**Modelo 1** → es el primer modelo que se ha estimado desde que se ha abierto el programa.

**MCO** → el método de estimación que se ha empleado.

**usando las observaciones 1–40** → la muestra contiene 40 observaciones.

**Variable dependiente: pizza** → la variable dependiente del modelo de regresión es *pizza*.

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1–40

Variable dependiente: pizza

|              | Coeficiente | Desv. Típica | Estadístico $t$ | Valor $p$ |
|--------------|-------------|--------------|-----------------|-----------|
| <b>const</b> | 342,885     | 72,3434      | 4,7397          | 0,0000    |
| <b>renta</b> | 1,83248     | 0,464301     | 3,9467          | 0,0003    |
| <b>edad</b>  | −7,57556    | 2,31699      | −3,2696         | 0,0023    |

La primera columna indica cuáles son las variables incluidas en el modelo. Estas variables pueden ser cuantitativas, ficticias o transformaciones de variables. Es decir, son las columnas de la matriz de datos  $X$ , en este caso, la constante y los regresores renta y edad.

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1–40  
Variable dependiente: pizza

|       | <b>Coeficiente</b> | Desv. Típica | Estadístico <i>t</i> | Valor p |
|-------|--------------------|--------------|----------------------|---------|
| const | <b>342,885</b>     | 72,3434      | 4,7397               | 0,0000  |
| renta | <b>1,83248</b>     | 0,464301     | 3,9467               | 0,0003  |
| edad  | <b>−7,57556</b>    | 2,31699      | −3,2696              | 0,0023  |

La segunda columna contiene las estimaciones MCO de los coeficientes del modelo. Esto es, las estimaciones que se obtienen a partir de  $\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$ .



# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1–40

Variable dependiente: pizza

|       | Coeficiente | <b>Desv. Típica</b> | Estadístico <i>t</i> | Valor p |
|-------|-------------|---------------------|----------------------|---------|
| const | 342,885     | <b>72,3434</b>      | 4,7397               | 0,0000  |
| renta | 1,83248     | <b>0,464301</b>     | 3,9467               | 0,0003  |
| edad  | −7,57556    | <b>2,31699</b>      | −3,2696              | 0,0023  |

La tercera columna contiene las desviaciones típicas del estimador MCO de los coeficientes, es decir, las desviaciones estimadas.

Estas estimaciones son la raíz cuadrada de los elementos diagonales de la matriz de varianzas y covarianzas:  $\widehat{V}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$  donde el estimador de la varianza de la perturbación es  $\hat{\sigma}^2 = SCR/(N - k)$ .

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1–40  
Variable dependiente: pizza

|       | Coeficiente | Desv. Típica | Estadístico $t$ | Valor $p$     |
|-------|-------------|--------------|-----------------|---------------|
| const | 342,885     | 72,3434      | <b>4,7397</b>   | <b>0,0000</b> |
| renta | 1,83248     | 0,464301     | <b>3,9467</b>   | <b>0,0003</b> |
| edad  | −7,57556    | 2,31699      | <b>−3,2696</b>  | <b>0,0023</b> |

Las dos últimas columnas contienen los  $t$ -estadísticos y el  $p$ -valor correspondiente. Esta información es útil para realizar contrastes de hipótesis como veremos detalladamente en el Tema 6.

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

|                               |                  |                                |                 |
|-------------------------------|------------------|--------------------------------|-----------------|
| Media de la vble. dep.        | 191,5500         | D.T. de la vble. dep.          | 155,8806        |
| <b>Suma de cuad. residuos</b> | <b>635636,7</b>  | D.T. de la regresión           | 131,0701        |
| <b>R<sup>2</sup></b>          | <b>0,329251</b>  | <b>R<sup>2</sup> corregido</b> | <b>0,292994</b> |
| <i>F</i> (2, 37)              | 9,081100         | Valor p (de <i>F</i> )         | 0,000619        |
| <b>Log-verosimilitud</b>      | <b>−250,2276</b> | <b>Criterio de Akaike</b>      | <b>506,4552</b> |
| <b>Criterio de Schwarz</b>    | <b>511,5218</b>  | <b>Hannan–Quinn</b>            | <b>508,2871</b> |

En la parte inferior del output aparece información variada. Por una parte están la suma de cuadrados residual, las medidas de bondad de ajuste y los criterios de error explicados anteriormente.

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

|                               |                 |                              |                 |
|-------------------------------|-----------------|------------------------------|-----------------|
| <b>Media de la vble. dep.</b> | <b>191,5500</b> | <b>D.T. de la vble. dep.</b> | <b>155,8806</b> |
| Suma de cuad. residuos        | 635636,7        | <b>D.T. de la regresión</b>  | <b>131,0701</b> |
| $R^2$                         | 0,329251        | $R^2$ corregido              | 0,292994        |
| $F(2, 37)$                    | 9,081100        | Valor p (de $F$ )            | 0,000619        |
| Log-verosimilitud             | -250,2276       | Criterio de Akaike           | 506,4552        |
| Criterio de Schwarz           | 511,5218        | Hannan-Quinn                 | 508,2871        |

$$\text{Media de la vble. dep.} = 191,5500 \rightarrow \overline{pizza} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N pizza_i$$

$$\text{D.T. de la vble. dep.} = 155,8806 \rightarrow S_{pizza} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (pizza_i - \overline{pizza})^2}$$

$$\text{D.T. de la regresión} = 131,0701 \rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SCR}{N-k}}$$

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

|                        |                 |                       |                 |
|------------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|
| Media de la vble. dep. | 191,5500        | D.T. de la vble. dep. | 155,8806        |
| Suma de cuad. residuos | 635636,7        | D.T. de la regresión  | 131,0701        |
| $R^2$                  | 0,329251        | $R^2$ corregido       | 0,292994        |
| <b>F(2, 37)</b>        | <b>9,081100</b> | <b>Valor p (de F)</b> | <b>0,000619</b> |
| Log-verosimilitud      | -250,2276       | Criterio de Akaike    | 506,4552        |
| Criterio de Schwarz    | 511,5218        | Hannan-Quinn          | 508,2871        |

Esta información es útil para realizar contrastes de hipótesis como veremos detalladamente en el Tema 6.

# Resultados de estimación.

## Ejemplo. Consumo de pollo.

En el fichero `pollo.gdt` contamos con información sobre el consumo anual de pollo (en kilos) así como algunos factores que pueden influir en su evolución:

- $X_2$ : Renta real disponible per cápita (en euros).
- $X_3$ : Precio del pollo en euros/kilo.
- $X_4$ : Precio del cerdo en euros/kilo.
- $X_5$ : Precio de la ternera en euros/kilo.
- Periodo de la gripe aviar (1999-2003)

El análisis de los factores que influyen en la evolución anual del consumo de pollo será tratado en detalle en el **Ejemplo 5.2**. En este tema vamos a estimar un modelo sencillo de determinación del consumo de pollo con el fin de explicar el output de estimación de Gretl, haciendo especial hincapié en los resultados específicos para datos de series temporales.

# Resultados de estimación.

Si queremos estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \quad t = 1, \dots, T$$

entonces en términos de la especificación general tendríamos:

- $Y_t$ : variable a explicar (consumo de pollo).
- $X_{2t}$ : variable explicativa cuantitativa.
- $X_{3t}$ : variable explicativa cuantitativa.
- $X_{4t}$ : variable explicativa cuantitativa.
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ : coeficientes a estimar.
- $u_t$ : la perturbación aleatoria.
- $T$ : número de años de la muestra.
- $t$ : subíndice que indica cuál es la observación.

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1990–2012 ( $T = 23$ )

Variable dependiente: Y

|                        | Coeficiente | Desv. Típica          | Estadístico $t$ | Valor p |
|------------------------|-------------|-----------------------|-----------------|---------|
| const                  | 38,6472     | 3,64960               | 10,5894         | 0,0000  |
| X4                     | 4,35136     | 1,56327               | 2,7835          | 0,0118  |
| X2                     | 0,0108762   | 0,00238125            | 4,5674          | 0,0002  |
| X3                     | −13,5271    | 3,94924               | −3,4252         | 0,0028  |
| Media de la vble. dep. | 39,66957    | D.T. de la vble. dep. | 7,372950        |         |
| Suma de cuad. residuos | 75,75855    | D.T. de la regresión  | 1,996820        |         |
| $R^2$                  | 0,936653    | $R^2$ corregido       | 0,926651        |         |
| $F(3, 19)$             | 93,64503    | Valor p (de $F$ )     | 1,45e−11        |         |
| Log-verosimilitud      | −46,34424   | Criterio de Akaike    | 100,6885        |         |
| Criterio de Schwarz    | 105,2305    | Hannan–Quinn          | 101,8308        |         |
| $\hat{\rho}$           | 0,562093    | Durbin–Watson         | 0,882813        |         |



# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1990–2012 ( $T = 23$ )  
Variable dependiente: Y

Si los datos que analizamos son de series temporales, la cabecera indica la frecuencia muestral:

**1990–2012 ( $T = 23$ )**  $\rightarrow$  23 observaciones anuales

Si la frecuencia hubiera sido trimestral: 1950:1-1955:3 ( $T = 23$ ).

Si la frecuencia hubiera sido mensual: 1980:01-1981:11 ( $T = 23$ ).

Si la frecuencia hubiera sido diaria: 1950-01-01:1950-06-04 ( $T = 23$ ).

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

Modelo 1: MCO, usando las observaciones 1990–2012 ( $T = 23$ )  
Variable dependiente: Y

|       | Coeficiente | Desv. Típica | Estadístico $t$ | Valor p |
|-------|-------------|--------------|-----------------|---------|
| const | 38,6472     | 3,64960      | 10,5894         | 0,0000  |
| X4    | 4,35136     | 1,56327      | 2,7835          | 0,0118  |
| X2    | 0,0108762   | 0,00238125   | 4,5674          | 0,0002  |
| X3    | −13,5271    | 3,94924      | −3,4252         | 0,0028  |

El resto de información que aparece en la parte superior del output es la misma que la ya comentada en el ejemplo anterior.

**Nótese** que Gretl estima un modelo con el orden de variables que hemos introducido. Es decir, si queremos estimar  $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$ , los resultados obtenidos son válidos, basta con saber que los resultados de la segunda fila corresponden a la variable  $X_4$  y no a  $X_2$ .

# Resultados de estimación.

## Output de Gretl.

|                        |                 |                       |          |
|------------------------|-----------------|-----------------------|----------|
| Media de la vble. dep. | 39,66957        | D.T. de la vble. dep. | 7,372950 |
| Suma de cuad. residuos | 75,75855        | D.T. de la regresión  | 1,996820 |
| $R^2$                  | 0,936653        | $R^2$ corregido       | 0,926651 |
| $F(3, 19)$             | 93,64503        | Valor p (de $F$ )     | 1,45e-11 |
| Log-verosimilitud      | -46,34424       | Criterio de Akaike    | 100,6885 |
| Criterio de Schwarz    | 105,2305        | Hannan-Quinn          | 101,8308 |
| $\hat{\rho}$           | <b>0,562093</b> | <b>Durbin-Watson</b>  | 0,882813 |

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \hat{u}_t^2}$$

$$\text{Durbin-Watson: } \frac{\sum_{t=2}^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T \hat{u}_t^2}$$

Estos resultados aparecen solamente cuando la estructura de datos está declarada como serie temporal. Este contraste de autocorrelación será estudiado con detalle en el Tema 7.

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.**
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Presentación de resultados.

En general, los resultados de estimación suelen resumirse a través de la FRM a la que se añade información sobre la desviación típica, el coeficiente de determinación y la suma de cuadrados residual.

## Resumen de resultados.

$$\widehat{\text{pizza}}_i = 342,885 + 1,83248 \text{ renta}_i - 7,57556 \text{ edad}_i \quad i = 1, \dots, 40$$

(72,343)                      (0,46430)                      (2,3170)

$$R^2 = 0,329 \quad SCR = 635636,7$$

(Desviaciones típicas entre paréntesis)

# Presentación de resultados.

Cuando se trata de un análisis realizado con series temporales, a la información anterior se suele añadir el estadístico de Durbin y Watson que se estudiará con detalle en el Tema 7.

## Resumen de resultados.

$$\hat{Y}_t = 38,6472 + 4,35136 X_{4t} + 0,0108762 X_{2t} - 13,5271 X_{3t}$$

(3,6496)            (1,5633)            (0,0023812)            (3,9492)

$$t = 1990, \dots, 2012 \quad R^2 = 0.9366 \quad SCR = 75,758 \quad DW = 0,8828$$

(Desviaciones típicas entre paréntesis)

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.**
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.

# Contenido

- 1 Estimación del Modelo de Regresión Lineal General (MRLG).
- 2 El estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- 3 La Función de Regresión Muestral (FRM).
- 4 Propiedades de los estimadores MCO.
- 5 Valoración del modelo.
- 6 El estimador de Mínimos Cuadrados Restringidos (MCR).
- 7 Resultados de la estimación con Gretl.
- 8 Presentación de resultados.
- 9 Actividades propuestas: A5.1 y A5.2.
- 10 Ejercicios propuestas: E5.1, E5.2 y E5.3.