Solución guía al ejercicio sobre estimación EE1

Considera el siguiente Modelo de Ecuaciones Simultáneas

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{12} y_{2t} + \gamma_{11} x_{1t} + u_{1t} \\
y_{2t} &= \beta_{21} y_{1t} + \gamma_{22} x_{2t} + \gamma_{23} x_{3t} + u_{2t}
\end{aligned}
$$

donde y_1, y_2 son variables endógenas, y x_1, x_2 y x_3 son las variables exógenas independientes de los términos de error u_{1t}, u_{2t}. Los errores estructurales satisfacen $u_{it} \sim iid(0, \sigma_i^2)$, $E(u_{1t} u_{2t}) = \sigma_{12}\ \forall t$ y $E(u_{1t} u_{2s}) = 0\ \forall t \neq s$.

1. Calcula el límite en probabilidad del estimador MCO de los coeficientes de la primera y segunda ecuación estructurales.

   Primera ecuación estructural:

$$
plim\, \hat{\delta}_1^{MCO} = \delta_1 + \left[plim \left(\frac{1}{T} Z_1' Z_1 \right) \right]^{-1} plim \left(\frac{1}{T} Z_1' \mathbf{u}_1 \right)
$$

   donde

$$
plim \left(\frac{1}{T} Z_1' Z_1 \right) = \begin{bmatrix} plim \frac{1}{T} \sum y_{2t}^2 & plim \frac{1}{T} \sum y_{2t} x_{1t} \\ plim \frac{1}{T} \sum y_{2t} x_{1t} & plim \frac{1}{T} \sum x_{1t}^2 \end{bmatrix}
$$

$$
plim \left(\frac{1}{T} Z_1' \mathbf{u}_1 \right) = \begin{bmatrix} plim \frac{1}{T} \sum y_{2t} u_{1t} \\ plim \frac{1}{T} \sum x_{1t} u_{1t} \end{bmatrix}
$$

   Segunda ecuación estructural:

$$
plim\, \hat{\delta}_2^{MCO} = \delta_2 + \left[plim \left(\frac{1}{T} Z_2' Z_2 \right) \right]^{-1} plim \left(\frac{1}{T} Z_2' \mathbf{u}_2 \right)
$$

   donde

$$
plim \left(\frac{1}{T} Z_2' Z_2 \right) = \begin{bmatrix} plim \left(\frac{1}{T} Y_2' Y_2 \right) & plim \left(\frac{1}{T} Y_2' X_2 \right) \\ plim \left(\frac{1}{T} X_2' Y_2 \right) & plim \left(\frac{1}{T} X_2' X_2 \right) \end{bmatrix}
$$

$$
plim \left(\frac{1}{T} Z_2' \mathbf{u}_2 \right) = \begin{bmatrix} plim \left(\frac{1}{T} Y_2' u_2 \right) \\ plim \left(\frac{1}{T} X_2' u_2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} plim \frac{1}{T} \sum y_{1t} u_{2t} \\ plim \frac{1}{T} \sum x_{2t} u_{2t} \\ plim \frac{1}{T} \sum x_{3t} u_{2t} \end{bmatrix}
$$

2. Analiza de qué depende la diferencia entre ese límite en probabilidad y el vector de parámetros poblacionales. ¿Son estimadores consistentes?

   Para la primera ecuación:

   $$plim\, \hat{\delta}_1^{MCO} - \delta_1 = \left[plim\left(\frac{1}{T}Z_1'Z_1\right)\right]^{-1} plim\left(\frac{1}{T}Z_1'\,\mathbf{u}_1\right) = \left[plim\left(\frac{1}{T}Z_1'Z_1\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} plim\frac{1}{T}\sum y_{2t}u_{1t} \\ \\ plim\frac{1}{T}\sum x_{1t}u_{1t} \end{bmatrix}$$

   Sería consistente si $plim\frac{1}{T}\sum y_{2t}u_{1t} = 0$, que en general no ocurre a no ser que $\beta_{21} = 0$ y $\sigma_{12} = 0$.

   Para la segunda ecuación estructural:

   $$plim\, \hat{\delta}_2^{MCO} - \delta_2 = \left[plim\left(\frac{1}{T}Z_2'Z_2\right)\right]^{-1} plim\left(\frac{1}{T}Z_2'\,\mathbf{u}_2\right) = \left[plim\left(\frac{1}{T}Z_2'Z_2\right)\right]^{-1} \begin{bmatrix} plim\frac{1}{T}\sum y_{1t}u_{2t} \\ \\ plim\frac{1}{T}\sum x_{2t}u_{2t} \\ \\ plim\frac{1}{T}\sum x_{3t}u_{2t} \end{bmatrix}$$

   Sería consistente si $plim\frac{1}{T}\sum y_{1t}u_{2t} = 0$, que en general no ocurre a no ser que $\beta_{12} = 0$ y $\sigma_{12} = 0$.

3. Calcula el límite en probabilidad del estimador MCO de los coeficientes de las ecuaciones de la forma reducida. ¿Son estimadores consistentes?

   $$plim\hat{\Pi}'_{MCO} = \Pi' + \left[\underbrace{plim\,\frac{1}{T}\left(X'\,X\right)}_{M}\right]^{-1} \underbrace{plim\,\left(\frac{1}{T}X'V\right)}_{=0} = \Pi'$$

   dado que como $V = UD$ donde D es una matriz de constantes

   $$plim\,\left(\frac{1}{T}X'\,U\right) = 0 \Rightarrow plim\,\left(\frac{1}{T}X'V\right) = 0$$

   Los estimadores MCO de la forma reducida son consistentes.

4. Calcula el límite en probabilidad del estimador MC2E de los coeficientes de la primera ecuación estructural. ¿Son estimadores consistentes?

   $$plim\,\hat{\delta}_1^{MC2E} = \delta_1 + \left(plim\,\frac{1}{T}\hat{Z}_1'Z_1\right)^{-1} plim\,\left(\frac{1}{T}\,\hat{Z}_1'\mathbf{u}_1\right) = \delta_1$$

   Dado que

   $$plim\,\frac{1}{T}\hat{Y}_1'\mathbf{u}_1 = plim\,\frac{1}{T}(X(X'X)^{-1}X'Y_1)'\mathbf{u}_1 = \underbrace{plim\,\frac{1}{T}Y_1'X}_{\Pi_1\,Q_{XX}}\;\underbrace{(plim\,\frac{1}{T}X'X)^{-1}}_{Q_{XX}^{-1}}\;\underbrace{plim\,\frac{1}{T}\,X'\mathbf{u}_j}_{\mathbf{0}}$$

   entonces $plim\left(\frac{1}{T}\,\hat{Z}_1'\mathbf{u}_1\right) = 0$

   El estimador MC2E de la primera ecuación estructural es consistente.

5. Calcula el límite en probabilidad del estimador MCI de los coeficientes de la segunda ecuación estructural. ¿Son estimadores consistentes?

$$plim\ \hat{\delta}_2^{MCI} = \delta_2 + \left(plim\ \frac{1}{T}\, X' Z_2 \right)^{-1} plim\ \left(\frac{1}{T}\, X'\, \mathbf{u}_2 \right)$$

Dado que se satisfacen las condiciones del Teorema de mann y Wald, $plim\left(\frac{1}{T}\, X'\, \mathbf{u}_j\right) = \mathbf{0}$. Por lo tanto $plim\ \hat{\delta}_2^{MCI} = \delta_2$ el estimador MCI es consistente.

6. ¿Cúal es la distribución asintótica del estimador MC2E de la primera ecuación estructural? ¿Y la del estimador MCI de la segunda ecuación estructural?

$$\sqrt{T}\left(\hat{\delta}_1^{MC2E} - \delta_1 \right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0},\ \ \sigma_1^2 Q^{-1}_{\hat{Z}_1 Z_1} \right)$$

donde

$$plim\, \frac{1}{T} \hat{Z}_1' Z_1 = \begin{pmatrix} plim\, \frac{1}{T} \hat{Y}_1' Y_1 & plim\, \frac{1}{T} \hat{Y}_1' X_1 \\ \\ plim\, \frac{1}{T} X_1' Y_1 & plim\, \frac{1}{T} X_1' X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1 Q_{XX} \Pi_1' & \Pi_1\, Q_{XX_1} \\ \\ Q'_{XX_1}\, \Pi_1' & Q_{X_1 X_1} \end{pmatrix} = Q_{\hat{Z}_1 Z_1}$$

$$\sqrt{T}\left(\hat{\delta}_2^{MCI} - \delta_2 \right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0},\ \ \sigma_2^2 Q^{-1}_{X Z_2} Q_{XX} Q^{-1}_{Z_2 X} \right)$$

donde $plim\left(\frac{1}{T}\, X' Z_j\right) = Q_{X Z_j}$ y $plim\left(\frac{1}{T}\, X' X\right) = Q_{XX}$