Considera el siguiente modelo de dos ecuaciones

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{12} y_{2t} + \gamma_{11} x_{1t} + \gamma_{12} x_{2t} + u_{1t} \\
y_{2t} &= \beta_{21} y_{1t} + \gamma_{23} x_{3t} + u_{2t}
\end{aligned}
$$

donde y_1, y_2 son las variables endógenas, x_1, x_2 y x_3 son las variables exógenas independientes de los términos de error u_{1t}, u_{2t}. Los errores estructurales satisfacen las siguientes hipótesis:

$$u_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2)\ ,\ E(u_{1t}u_{2t}) = \sigma_{12}\, \forall t \text{ y } E(u_{1t}u_{2s}) = 0\, \forall t \neq s.$$

Se dispone de la siguiente información muestral de productos cruzados de las variables del modelo utilizando 25 observaciones,

	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_1	35	30	10	10	0
y_2		115	10	30	40
x_1			10	0	0
x_2				10	10
x_3					20

Estima el sistema por información completa utilizando el estimador de Mínimos Cuadrados en tres Etapas (MC3E)

Respuesta:

Estamos en un contexto de información completa por lo que consideramos el sistema de las 2 ecuaciones de la forma estructural a estimar conjuntamente:

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Y_j}_{TxG_j} \underbrace{\beta_j}_{G_jx1} + \underbrace{X_j}_{TxK_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_jx1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad j = 1, 2$$

o de forma más compacta

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Z_j}_{Tx(G_j+K_j)} \underbrace{\delta_j}_{(G_j+K_j)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad j = 1, 2$$

donde $Z_j = [Y_j \;\; X_j]\,,\qquad \delta_j = \begin{bmatrix} \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix},\qquad \mathbf{u}_j \sim (\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$ y $E(\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j') = \sigma_{ij} I_T$.

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{y}}_{2Tx1} = \underbrace{Z}_{2TxJ} \underbrace{\delta}_{Jx1} + \underbrace{\mathbf{u}}_{2Tx1}$$

donde $J = \sum_{j=1}^{2}(G_j + K_j)$ y $\mathbf{u} \sim (\mathbf{0}, (\Sigma \bigotimes I_T))$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{21} & x_{11} & x_{21} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2T} & x_{1T} & x_{2T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_{11} & x_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & y_{1T} & x_{3T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \beta_{21} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}}_{\delta} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1T} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{2T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

$$E(\mathbf{uu}') = (\Sigma \bigotimes I_T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 I_T & \sigma_{12} I_T \\ \sigma_{12} I_T & \sigma_2^2 I_T \end{bmatrix}$$

En este caso $T = 25$, $J = (G_1 + G_2 + K_1 + K_2) = 1 + 1 + 2 + 1 = 5$.

El estimador de MC3E, utilizando un estimador consistente de Σ:

$$\hat{\delta}_{MC3E} = \left(Z' \left(\widehat{\Sigma}^{-1} \bigotimes P_X\right) Z\right)^{-1} \left(Z' \left(\widehat{\Sigma}^{-1} \bigotimes P_X\right) \mathbf{y}\right) = (\hat{W}'Z)^{-1}\,\hat{W}'\mathbf{y}$$

De esta forma, el estimador MC3E se puede interpretar como un estimador de VI donde la matriz de instrumentos es $\hat{W}$.

Dada la muestra obtenemos las siguientes matrices:

$$Z_1'P_xZ_1 = Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_1 = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 40 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Z_1'P_xZ_2 = Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_2 = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 40 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 10 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Z_2'P_xZ_2 = Z_1'X(X'X)^{-1}X'Z_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 10 & 10 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Z_1'P_xZ_1 = \begin{bmatrix} 110 & 10 & 30 \\ 10 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad Z_1'P_xZ_2 = \begin{bmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 0 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \qquad Z_2'P_xZ_2 = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$Z_1'P_x\mathbf{y}_1 = Z_1'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 40 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Z_1' P_x \mathbf{y}_2 = Z_1' X(X'X)^{-1} X' \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 40 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$Z_2' P_x \mathbf{y}_1 = Z_2' X(X'X)^{-1} X' \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Z_2' P_x \mathbf{y}_2 = Z_2' X(X'X)^{-1} X' Z_2 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Si previamente se ha estimado cada ecuación de la forma estructural por MC2E, los elementos de Σ se pueden estimar consistentemente con los siguientes estimadores:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \hat{\mathbf{u}}_i' \hat{\mathbf{u}}_j \qquad i = 1, \ldots, G \quad j = 1, \ldots, G \quad \texttt{donde} \quad \hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{y}_i - Z_i \hat{\delta}_i^{MC2E}$$

donde las estimaciones de las varianzas corresponden a $i = j$.

Dada la muestra y las estimaciones de los coeficientes por MC2E, obtenemos

$$\hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{y}_1 - Z_1 \hat{\delta}_1^{MC2E})'(\mathbf{y}_1 - Z_1 \hat{\delta}_1^{MC2E}) = \mathbf{y}_1' \mathbf{y}_1 - 2\hat{\delta}_1' Z_1' \mathbf{y}_1 + \hat{\delta}_1' Z_1' Z_1 \hat{\delta}_1$$

$\hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_1 = 35 - 2(30) + 35 = 10$

$$\hat{\mathbf{u}}_2' \hat{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{y}_2 - Z_2 \hat{\delta}_2^{MC2E})'(\mathbf{y}_2 - Z_2 \hat{\delta}_2^{MC2E}) = \mathbf{y}_2' \mathbf{y}_2 - 2\hat{\delta}_2' Z_2' \mathbf{y}_2 + \hat{\delta}_2' Z_2' Z_2 \hat{\delta}_2$$

$\hat{\mathbf{u}}_2' \hat{\mathbf{u}}_2 = 115 - 2(110) + 115 = 10$

$$\hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{y}_1 - Z_1 \hat{\delta}_1^{MC2E})'(\mathbf{y}_2 - Z_2 \hat{\delta}_2^{MC2E}) = \mathbf{y}_1' \mathbf{y}_2 - \hat{\delta}_1' Z_1' \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1' Z_2 \hat{\delta}_2 + \hat{\delta}_1' Z_1' Z_2 \hat{\delta}_2$$

$\hat{\mathbf{u}}_1' \hat{\mathbf{u}}_2 = 30 - 25 - 35 + 30 = 0$

$$\widehat{\Sigma} = 1/25 \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} & \hat{\sigma}^{12} \\ \hat{\sigma}^{12} & \hat{\sigma}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 2,5 \end{bmatrix}$$

Las estimaciones de los coeficientes por MC3E se obtienen sustituyendo los resultados anteriores en la expresión:

$$\hat{\delta}_{MC3E} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} Z_1' P_x Z_1 & \hat{\sigma}^{12} Z_1' P_x Z_2 \\ \hat{\sigma}^{12} Z_2' P_x Z_1 & \hat{\sigma}^{11} Z_2' P_x Z_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11} Z_1' P_x \mathbf{y}_1 + \hat{\sigma}^{12} Z_1' P_x \mathbf{y}_2 \\ \hat{\sigma}^{12} Z_2' P_x \mathbf{y}_1 + \hat{\sigma}^{22} Z_2' P_x \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{11}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{12}^{MC3E} \\ \hat{\beta}_{21}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{23}^{MC3E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \begin{bmatrix} 110 & 10 & 30 \\ 10 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 0 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \\ \\ 0 \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix} & 2,5 \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2,5 \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 110 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} \\ \\ 0 \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix} + 2,5 \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

Dado que la estimación de σ_{12} ha sido igual a cero, las estimaciones de los coeficientes por MC3E coinciden con las obtenidas ecuación por ecuación por MC2E.

$$
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{11}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{12}^{MC3E} \\ \hat{\beta}_{21}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{23}^{MC3E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \begin{bmatrix} 110 & 10 & 30 \\ 10 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{bmatrix} & 0 \\ \\ 0 & 2,5 \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2,5 \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \\ 2,5 \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{11}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{12}^{MC3E} \\ \hat{\beta}_{21}^{MC3E} \\ \hat{\gamma}_{23}^{MC3E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 110 & 10 & 30 \\ 10 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12}^{MC2E} \\ \hat{\gamma}_{11}^{MC2E} \\ \hat{\gamma}_{12}^{MC2E} \\ \hat{\beta}_{21}^{MC2E} \\ \hat{\gamma}_{23}^{MC2E} \end{bmatrix}
$$