Considera el siguiente modelo de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{12} y_{2t} + \gamma_{11} x_{1t} + \gamma_{12} x_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{21} y_{1t} + \gamma_{23} x_{3t} + u_{2t} \end{aligned}$$

donde y_1, y_2 son las variables endógenas, x_1, x_2 y x_3 son las variables exógenas independientes de los términos de error u_{1t}, u_{2t}. Los errores estructurales satisfacen las siguientes hipótesis:

$$u_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2)\ ,\ E(u_{1t}u_{2t}) = \sigma_{12}\,\forall t \text{ y } E(u_{1t}u_{2s}) = 0\,\forall t \neq s.$$

Se dispone de la siguiente información muestral de productos cruzados de las variables del modelo utilizando 25 observaciones,

	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_1	35	30	10	10	0
y_2		115	10	30	40
x_1			10	0	0
x_2				10	10
x_3					20

1. Estima la primera ecuación por Máxima Verosimilitud Información Limitada (MVIL)

Respuesta:

Estimación por MVIL de la primera ecuación

$$y_{1t} = \beta_{12} y_{2t} + \gamma_{11} x_{1t} + \gamma_{12} x_{2t} + u_{1t}$$

Esta ecuación está exáctamente identificada por lo que MVIL = MCI = MC2E. Así y todo vamos a ver el procedimiento utilizando el ratio de mínima varianza.

Denotamos

$$\beta_1^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_{12} \end{bmatrix} \quad \gamma_1^+ = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad Y_1^+ = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} \\ \vdots & \vdots \\ y_{1T} & y_{2T} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ \vdots & \vdots \\ x_{1T} & x_{2T} \end{bmatrix} \quad X_1^* = \begin{bmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3T} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1^* & X_1 \end{bmatrix}$$

a) Calculamos las siguientes matrices de sumas de cuadrados residuales:

$$S_1^0 = Y_1^{+\prime} M_1 Y_1^+ = Y_1^{+\prime}(I_T - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')Y_1^+ = E_1^{0\prime}E_1^0$$

$$S_1^1 = Y_1^{+\prime} M Y_1^+ = Y_1^{+\prime}(I_T - X(X'X)^{-1}X')Y_1^+ = E_1^{1\prime}E_1^1$$

Cada columna de $E_1^0 = M_1Y_1^+$ es el vector de residuos minimocuadráticos obtenidos de la regresión de la columna correspondiente de Y_1^+ sobre X_1. Para $E_1^1 = MY_1^+$ es lo mismo pero incluyendo en las regresiones también a X_1^*, esto es todas las variables exógenas X. Realizamos los cálculos necesarios para obtener S_1^0 y S_1^1:

$$(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_1 = 1/10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_2 = 1/10\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos las siguientes sumas de cuadrados residuales:

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^0 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_1'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_1 = 35 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = 35 - 20 = 15$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 = \mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_2 = 115 - \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = 115 - 100 = 15$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_2 = 30 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = 30 - 40 = -10$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^1 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_1'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_1 = 35 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 35 - 30 = 5$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 = \mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_2 = 115 - \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 21 \end{pmatrix} = 115 - 110 = 5$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_2 = 30 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 30 - 30 = 0$$

Obtenemos las matrices $S_1^0 = E_1^{0\prime}E_1^0$ y $S_1^1 = E_1^{1\prime}E_1^1$:

$$E_1^{0\prime}E_1^0 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^0 & \hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 & \hat{\mathbf{e}}_2^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 15 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{1\prime}E_1^1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^1 & \hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 & \hat{\mathbf{e}}_2^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Se obtienen las raíces características de la matriz $A = (S_1^1)^{-1}S_1^0$. Todas las raíces son reales y mayores o iguales a la unidad. Se elige la menor raíz característica λ_1. En este caso sabemos que $\lambda_1 = 1$ ya que la ecuación está exactamente identificada.

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = 9 + \lambda^2 - 6\lambda - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

La ecuación característica es el polinomio $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$. La menor raíz característica es, como hemos comentado antes, $\lambda_1 = 1$.

c) Particionamos la matriz S_1^0 y S_1^1

$$S_1^0 = \begin{pmatrix} s_{11}^0 & \mathbf{s}_1^{0\prime} \\ \underline{\mathbf{s}}_1^0 & S_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$S_1^1 = \begin{pmatrix} s_{11}^1 & \mathbf{s}_1^{1\prime} \\ \underline{\mathbf{s}}_1^1 & S_{11}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Con estos elementos disponibles se puede obtener

$$\hat{\beta}_{12}^{MVIL} = \left[S_{11}^0 - \lambda_1 S_{11}^1\right]^{-1}(\mathbf{s}_1^0 - \lambda_1 \mathbf{s}_1^1) = (15-1\,(5))^{-1}(-10-1\,(0)) = -10/10 = -1$$

Una vez obtenido $\hat{\beta}_{12}^{MVIL} = -1$ el estimador MVIL de γ_1 se obtiene de

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{11}^{MVIL} \\ \hat{\gamma}_{12}^{MVIL} \end{pmatrix} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\hat{\beta}_1^{MVIL}) = (X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_1 - (X_1'X_1)^{-1}X_1'\mathbf{y}_2\hat{\beta}_1^{MVIL}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{11}^{MVIL} \\ \hat{\gamma}_{12}^{MVIL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Estimación por MVIL de la segunda ecuación

$$y_{2t} = \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + u_{2t}$$

Esta ecuación está sobreidentificada por lo que en este caso no tienen porque coincidir las estimaciones de MVIL con las de MC2E. Aún así pudiera darse el caso. Vamos a ver el procedimiento utilizando el ratio de mínima varianza.

Denotamos

$$\beta_2^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_{21} \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad Y_2^+ = \begin{bmatrix} y_{21} & y_{11} \\ \vdots & \vdots \\ y_{2T} & y_{1T} \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3T} \end{bmatrix} \quad X_2^* = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ \vdots & \\ x_{1T} & x_{2T} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_2^* & X_2 \end{bmatrix}$$

Procedimiento:

a) Calculamos las siguientes matrices de sumas de cuadrados residuales:

$$S_2^0 = Y_2^{+\prime}M_2Y_2^+ = Y_2^{+\prime}(I_T - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2')Y_2^+ = E_2^{0\prime}E_2^0$$

$$S_2^1 = Y_2^{+\prime}MY_2^+ = Y_2^{+\prime}(I_T - X(X'X)^{-1}X')Y_2^+ = E_2^{1\prime}E_2^1$$

Cada columna de $E_2^0 = M_2Y_2^+$ es el vector de residuos minimocuadráticos obtenidos de la regresión de la columna correspondiente de Y_2^+ sobre X_2. Para $E_2^1 = MY_2^+$ es lo mismo pero incluyendo en las regresiones también a X_2^*, esto es todas las variables exógenas X.

Realizamos los cálculos necesarios para obtener S_2^0 y S_2^1:

$$(X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_1 = 0$$
$$(X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_2 = 40/20 = 2$$
$$(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos las siguientes sumas de cuadrados residuales:

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^0 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_1 = 35 - 0 = 35$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 = \mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_2 = 115 - 80 = 35$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1'X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_2 = 30 - 0 = 30$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^1 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_1'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_1 = 35 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 35 - 30 = 5$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 = \mathbf{y}_2'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_2'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_2 = 115 - \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 21 \end{pmatrix} = 115 - 110 = 5$$

$$\hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 = \mathbf{y}_1'\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1'X(X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_2 = 30 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 30 - 30 = 0$$

Obtenemos las matrices $S_2^0 = E_2^0{}'E_2^0$ y $S_2^1 = E_2^1{}'E_2^1$:

$$E_2^{0\prime} E_2^0 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^0 & \hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 \\ \hat{\mathbf{e}}_1^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 & \hat{\mathbf{e}}_2^{0\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 30 \\ 30 & 35 \end{bmatrix}$$

$$E_1^1{}'E_1^1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_1^1 & \hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 & \hat{\mathbf{e}}_2^{1\prime}\hat{\mathbf{e}}_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Se obtienen las raíces características de la matriz $A = (S_1^1)^{-1}S_1^0$. Todas las raíces son reales y mayores o iguales a la unidad. Se elige la menor raíz característica λ_1. En este caso sabemos que $\lambda_1 = 1$ ya que la ecuación está exactamente identificada.

$$A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 30 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)^2 - (6)^2 = \lambda^2 - 14\lambda + 13$$

La ecuación característica es el polinomio $\lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0$ cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 13$. La menor raíz característica es, aunque la ecuación no está exactamente identificada $\lambda_1 = 1$.

c) Particionamos la matriz S_2^0 y S_2^1

$$S_2^0 = \begin{pmatrix} s_{22}^0 & \mathbf{s}_2^0{}' \\ \underline{\mathbf{s}}_2^0 & S_{22}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 30 & 35 \end{pmatrix}$$

$$S_2^1 = \begin{pmatrix} s_{22}^1 & \mathbf{s}_2^1{}' \\ \underline{\mathbf{s}}_2^1 & S_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Con estos elementos disponibles se puede obtener

$$\hat{\beta}_{21}^{MVIL} = \left[S_{22}^0 - \lambda_1 S_{22}^1\right]^{-1}(\mathbf{s}_2^0 - \lambda_1 \mathbf{s}_2^1) = (35 - 1\,(5))^{-1}(30 - 1\,(0)) = 30/30 = 1$$

Una vez obtenido $\hat{\beta}_{21}^{MVIL} = 1$ el estimador MVIL de γ_2 se obtiene de

$$\hat{\gamma}_{23}^{MVIL} = (X_2'X_2)^{-1}X_2'(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\hat{\beta}_2^{MVIL}) = (X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_2 - (X_2'X_2)^{-1}X_2'\mathbf{y}_1\hat{\beta}_2^{MVIL}$$

$$\hat{\gamma}_{23}^{MVIL} = (1/20) \times 40 - (1/20) \times 0 \times 1 = 2$$

En este caso, aún estando la ecuación sobreidentificada, las estimaciones por MVIL coinciden con las de MC2E y estas coincidían con las de MCI. Esto en general no tiene porqué ocurrir.