Considera el siguiente modelo de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + u_{2t} \end{aligned}$$

donde y_1, y_2 son las variables endógenas, x_1, x_2 y x_3 son las variables exógenas independientes de los términos de error u_{1t}, u_{2t}. Los errores estructurales satisfacen las siguientes hipótesis:

$$u_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2)\ ,\ E(u_{1t}u_{2t}) = \sigma_{12}\,\forall t \text{ y } E(u_{1t}u_{2s}) = 0\,\forall t \neq s.$$

Se dispone de la siguiente información muestral de productos cruzados de las variables del modelo utilizando 25 observaciones,

	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_1	35	30	10	10	0
y_2		115	10	30	40
x_1			10	0	0
x_2				10	10
x_3					20

1. Estima la primera ecuación por MC2E. ¿Coincide con la estimación por MCI
   Respuesta:
   Primera ecuación

$$\underbrace{\mathbf{y}_1}_{Tx1} = \underbrace{Y_1}_{TxG_1}\underbrace{\beta_1}_{G_1x1} + \underbrace{X_1}_{TxK_1}\underbrace{\gamma_1}_{K_1x1} + \underbrace{\mathbf{u}_1}_{Tx1}$$

o de forma más compacta

$$\underbrace{\mathbf{y}_1}_{Tx1} = \underbrace{Z_1}_{Tx(G_1+K_1)}\underbrace{\delta_1}_{(G_1+K_1)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_1}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_1 \sim (\mathbf{0}, \sigma_1^2 I_T)$$

donde $T = 25$, $G_1 = 1$, $K_1 = 2$

$$\underbrace{\mathbf{y}_1}_{Tx1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1T} \end{bmatrix} \quad Z_1 = \begin{bmatrix} \underbrace{Y_1}_{TxG_1} & \underbrace{X_1}_{TxK_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{21} & x_{11} & x_{21} \\ y_{22} & x_{12} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2T} & x_{1T} & x_{2T} \end{bmatrix} \quad \delta_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

La primera ecuación está exáctamente identificada por lo que la matriz $(Z_1'X)$ es cuadrada (3x3) e invertible por lo que

$$\left(Z_1'X\,(X'X)^{-1}\,X'Z_1\right)^{-1} = (X'Z_1)^{-1}\,(X'X)\,(Z_1'X)^{-1}$$

entonces sustituyendo en la expresión para el estimador MC2E se puede escribir como:

$$\hat{\delta}_1^{MC2E} = \left(Z_1' X \left(X'X \right)^{-1} X' Z_1 \right)^{-1} Z_1' X \left(X'X \right)^{-1} X' \mathbf{y}_1$$

obtenemos,

$$\hat{\delta}_1^{MC2E} = \left(X' Z_1 \right)^{-1} \left(X'X \right) \left(Z_1' X \right)^{-1} \left(Z_1' X \right) \left(X'X \right)^{-1} X' \mathbf{y}_1 = \left(X' Z_1 \right)^{-1} X' \mathbf{y}_1 = \hat{\delta}_1^{MCI}$$

Esto es, dada la muestra:

$$\hat{\delta}_{1,MC2E} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{12} \\ \hat{\gamma}_{11} \\ \hat{\gamma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dado que la ecuación está exáctamente identificada han de coincidir las estimaciones de MC2E con las de MCI. Y eso es lo que ocurre.

2. Estima la segunda ecuación por MC2E.
   Respuesta:
   Segunda ecuación

$$\underbrace{\mathbf{y}_2}_{Tx1} = \underbrace{Y_2}_{TxG_2} \underbrace{\beta_2}_{G_2x1} + \underbrace{X_2}_{TxK_2} \underbrace{\gamma_2}_{K_2x1} + \underbrace{\mathbf{u}_2}_{Tx1}$$

o de forma más compacta

$$\underbrace{\mathbf{y}_2}_{Tx1} = \underbrace{Z_2}_{Tx(G_2+K_2)} \underbrace{\delta_2}_{(G_2+K_2)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_2}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_2 \sim (\mathbf{0}, \sigma_2^2 I_T)$$

donde $T = 25$, $G_2 = 1$, $K_2 = 1$

$$\underbrace{\mathbf{y}_2}_{Tx1} = \begin{bmatrix} y_{21} \\ \vdots \\ y_{2T} \end{bmatrix} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} \underbrace{Y_2}_{TxG_2} & \underbrace{X_2}_{TxK_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & x_{31} \\ y_{12} & x_{32} \\ \vdots & \vdots \\ y_{1T} & x_{3T} \end{bmatrix} \quad \delta_2 = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

La segunda ecuación está sobreidentificada por lo que la matriz $(Z_2' X)$ no es cuadrada (2x3). Por lo tanto consideramos la expresión del estimador MC2E:

$$\hat{\delta}_2^{MC2E} = \left(Z_2' X \left(X'X \right)^{-1} X' Z_2 \right)^{-1} Z_2' X \left(X'X \right)^{-1} X' \mathbf{y}_2$$

dada la muestra obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\hat{\delta}_{2,MC2E} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{21} \\ \hat{\gamma}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En este caso la ecuación está sobreidentificada por lo que no tendrían que coincidir MC2E y MCI aunque dada esta muestra eso ocurre.