Considera el siguiente modelo de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + u_{2t} \end{aligned}$$

donde y_1, y_2 son las variables endógenas, x_1, x_2 y x_3 son las variables exógenas independientes de los términos de error u_{1t}, u_{2t}. Los errores estructurales satisfacen las siguientes hipótesis:

$$u_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2) \ , \ E(u_{1t}u_{2t}) = \sigma_{12} \, \forall t \text{ y } E(u_{1t}u_{2s}) = 0 \, \forall t \neq s.$$

Se dispone de la siguiente información muestral de productos cruzados de las variables del modelo utilizando 25 observaciones,

	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_1	35	30	10	10	0
y_2		115	10	30	40
x_1			10	0	0
x_2				10	10
x_3					20

1. Estima la Forma Reducida del modelo.
   Respuesta:
   Estimar la matriz de coeficientes de la forma reducida Π por MCO ecuación por ecuación,

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{X}_{TxK}\underbrace{\pi_j}_{Kx1} + \mathbf{v}_j$$

$$\hat{\pi}_j^{MCO} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_j \qquad j = 1, \ldots, G$$

que es equivalente a estimar el siguiente sistema:

$$\underbrace{Y}_{TxG} = \underbrace{X}_{TxK}\underbrace{\Pi'}_{KxG} + \underbrace{V}_{TxG}$$

donde $T = 25$, $G = 2$ y $K = 3$.

$$\hat{\Pi}'_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$\hat{\Pi}'_{MCO} = \left[\hat{\pi}_1^{MCO} \ \hat{\pi}_2^{MCO}\right]$, donde $\hat{\pi}_j^{MCO} \quad j = 1, 2$ son las columnas de $\hat{\Pi}'_{MCO}$.
En este caso:

$$\underbrace{Y}_{25x2} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \\ \vdots & \vdots \\ y_{1,25} & y_{2,25} \end{bmatrix} \qquad \underbrace{X}_{25x3} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,25} & x_{2,25} & x_{3,25} \end{bmatrix}$$

Dada la muestra se obtiene:

$$\underbrace{X'X}_{3x3} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{X'Y}_{3x2} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 30 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$$

Siendo la estimación MCO de los parámetros de la F.R. los siguientes:

$$\hat{\Pi}'_{MCO} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 30 \\ 0 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_{11} & \hat{\pi}_{21} \\ \hat{\pi}_{12} & \hat{\pi}_{22} \\ \hat{\pi}_{13} & \hat{\pi}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Estima la primera ecuación por MCI.
Respuesta:
La primera ecuación está exactamente identificada. El sistema de ecuaciones que relaciona los parámetros de la forma estructural de la primera ecuación y los parámetros de la forma reducida es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas. Sustituyendo las estimaciones obtenidas de los coeficientes de la Forma Reducida ($\hat{\pi}_{11}, \hat{\pi}_{12}, \hat{\pi}_{13}, \hat{\pi}_{21}, \hat{\pi}_{22}, \hat{\pi}_{23}$) y resolviendo para $\hat{\beta}_{12}$, $\hat{\gamma}_{11}$ y $\hat{\gamma}_{12}$ obtenemos:

$$(1) \qquad \hat{\pi}_{11} - \hat{\beta}_{12}^{MCI}\hat{\pi}_{21} = \hat{\gamma}_{11}^{MCI}$$

$$(2) \qquad \hat{\pi}_{12} - \hat{\beta}_{12}^{MCI}\hat{\pi}_{22} = \hat{\gamma}_{12}^{MCI}$$

$$(3) \qquad \hat{\pi}_{13} - \hat{\beta}_{12}^{MCI}\hat{\pi}_{23} = 0$$

De la tercera ecuación resolvemos para $\hat{\beta}_{12}^{MCI} = \hat{\pi}_{13}/\hat{\pi}_{23} = -1/1 = -1$.

Sustituyendo $\hat{\beta}_{12}^{MCI} = -1$, junto con las estimaciones obtenidas de los coeficientes de la forma reducida, en la primera y segunda ecuación obtenemos:

$$\hat{\gamma}_{12}^{MCI} = \hat{\pi}_{12} - \hat{\beta}_{12}^{MCI}\hat{\pi}_{22} = 2 - (-1)2 = 4.$$

$$\hat{\gamma}_{11}^{MCI} = \hat{\pi}_{11} - \hat{\beta}_{12}^{MCI}\hat{\pi}_{21} = 1 - (-1)1 = 2.$$

3. Estima la segunda ecuación por MCI. ¿Hay algún problema?
   Respuesta:
   La segunda ecuación está sobreidentificada. Esto implica que la solución del sistema de tres ecuaciones a dos incógnitas implica ciertas restricciones sobre los coeficientes de la Forma Reducida:

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta_{21} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

$$(1) \qquad -\pi_{11}\beta_{21} + \pi_{21} = 0$$

$$(2) \qquad -\pi_{12}\beta_{21} + \pi_{22} = 0$$

$$(3) \qquad -\pi_{13}\beta_{21} + \pi_{23} = \gamma_{23}$$

De la primera y segunda ecuaciones obtenemos que $\beta_{21} = \frac{\pi_{21}}{\pi_{11}} = \frac{\pi_{22}}{\pi_{12}}$. Por lo tanto, la sobreidentificación implica la restricción no lineal:

$$\frac{\pi_{21}}{\pi_{11}} = \frac{\pi_{22}}{\pi_{12}}$$

Si se estima sin imponer la restricción puede que no se satisfaga, por lo que obtendríamos diferentes estimaciones para los parámetros estructurales β_{21} y γ_{23}. Por este motivo no suele ser conveniente aplicar el método de MCI a una ecuación sobreidentificada.

En el caso de la muestra que nos ocupa obtenemos:

$$\hat{\beta}_{21} = \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

y por otro lado

$$\hat{\beta}_{21} = \frac{\hat{\pi}_{22}}{\hat{\pi}_{12}} = \frac{2}{2} = 1$$

En este caso, dada la muestra no han dado resultados distintos, pero pudiera haber ocurrido. La estimación de γ_{23} por MCI viene dada por

$$-\hat{\pi}_{13}\hat{\beta}_{21} + \hat{\pi}_{23} = \hat{\gamma}_{23} \rightarrow \hat{\gamma}_{23} = -(-1)(1) + 1 = 2$$