Considera el siguiente modelo de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11}x_{1t} + \gamma_{12}x_{2t} + u_{1t} \\ y_{2t} &= \beta_{21}y_{1t} + \gamma_{23}x_{3t} + u_{2t} \end{aligned}$$

donde y_1, y_2 son las variables endógenas, x_1, x_2 y x_3 son las variables exógenas independientes de los términos de error u_{1t}, u_{2t}. Los errores estructurales satisfacen las siguientes hipótesis:

$$u_{it} \sim NID(0, \sigma_i^2)\ ,\ E(u_{1t}u_{2t}) = \sigma_{12}\,\forall t \text{ y } E(u_{1t}u_{2s}) = 0\,\forall t \neq s.$$

Se dispone de la siguiente información muestral de productos cruzados de las variables del modelo utilizando 25 observaciones,

	y_1	y_2	x_1	x_2	x_3
y_1	35	30	10	10	0
y_2		115	10	30	40
x_1			10	0	0
x_2				10	10
x_3					20

1. Escribe matricialmente la Forma Estructural.

Respuesta

<u>**Forma Estructural**</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

$$B\mathbf{y}_t + \Gamma\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde B es una matriz (2×2) de parámetros que acompañan a las $G = 2$ variables endógenas, Γ es una matriz (2×3) que acompañan a las $K = 3$ variables exógenas, $\mathbf{y}_t$ es el vector (2×1) de variables endógenas en el momento t, $\mathbf{x}_t$ es el vector (3×1) de variables exógenas en el momento t y $\mathbf{u}_t$ es el vector (2×1) de términos de error de cada ecuación en el momento t de la F.E.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

2. Escribe matricialmente la Forma Reducida.

Respuesta

<u>**Forma Reducida**</u>:

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ x_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_t = \Pi \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \end{bmatrix} = -B^{-1}\Gamma \qquad \mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{u}_t$$

siendo $\mathbf{v}_t \sim NID(0, \Omega)$ donde $\Omega = B^{-1}\Sigma(B^{-1})'$.

3. Utiliza las condiciones de Orden y Rango para analizar la identificación de cada una de las dos ecuaciones.

Respuesta

- **Primera Ecuación**:
  - Condición de Orden (necesaria) se satisface con igualdad, esto es el número de variables exógenas excluidas ($K_1^* = 1$, se excluye x_3) es igual al número de variables endógenas incluídas en la ecuación como explicativas ($G_1 = 1$, se incluye y_{2t}).
  - Condición de Rango (necesaria y suficiente) se satisface si $\gamma_{23} \neq 0$.

$$A\Phi_1 = [B : \Gamma]\,\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 & -\gamma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma_{23} \end{bmatrix}$$

rango (A Φ_1) = 1 = G-1 = 2-1 si $\gamma_{23} \neq 0$.

- **Segunda Ecuación**:
  - Condición de Orden (necesaria) se satisface con exceso, esto es el número de variables exógenas excluidas ($K_2^* = 2$, se excluyen x_1 y x_2) es mayor que el número de variables endógenas incluídas en la ecuación como explicativas ($G_2 = 1$, se incluye y_{1t}).
  - Condición de Rango (necesaria y suficiente) se satisface si $\gamma_{11} \neq 0$ y/o $\gamma_{12} \neq 0$.

$$A\Phi_2 = [B : \Gamma]\,\Phi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & 0 \\ -\beta_{21} & 1 & 0 & 0 & -\gamma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & -\gamma_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rango (A Φ_2) = 1 = G-1 = 2-1 si $\gamma_{11} \neq 0$ y/o $\gamma_{12} \neq 0$.

Por lo tanto, si se satisfacen las condiciones de rango la primera ecuación estará exactamente identificada y la segunda ecuación sobreidentificada.

4. Utiliza la relación entre la Forma Reducida y la Forma estructural para analizar la identificación de cada una de las dos ecuaciones.

Respuesta

- **Primera ecuación de la forma estructural**:

El sistema de ecuaciones que relaciona los parámetros de la forma estructural de la primera ecuación y los parámetros de la forma reducida es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$(1) \qquad \pi_{11} - \beta_{12}\pi_{21} = \gamma_{11}$$

$$(2) \qquad \pi_{12} - \beta_{12}\pi_{22} = \gamma_{12}$$

$$(3) \qquad \pi_{13} - \beta_{12}\pi_{23} = 0$$

De la tercera ecuación resolvemos para $\beta_{12} = \pi_{13}/\pi_{23}$. Sustituyendo en la primera y segunda ecuación obtenemos:

$$\gamma_{12} = \pi_{12} - \beta_{12}\pi_{22}$$
$$\gamma_{11} = \pi_{11} - \beta_{12}\pi_{21}$$

Por lo tanto vemos que se puede recuperar de forma única los parámetros de la forma estructural a partir de los parámetros de la forma reducida si $\pi_{23} \neq 0$. Esta sería la condición para la identificación de la primera ecuación en términos de la matriz Π.
Esta condición implica que el instrumento para esta ecuación, que es la variable exógena omitida x_3 (las otras dos variables x_1 y x_2 ya están por defecto por estar incluídas en la ecuación) ha de estar correlacionada con la variable endógena que aparece como variable explicativa en la ecuación, esto es, la variable a instrumentalizar y_2.

- **Segunda ecuación de la forma estructural**:

  El sistema de ecuaciones que relaciona los parámetros de la forma estructural de la primera ecuación y los parámetros de la forma reducida es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta_{21} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}$$

$$(1) \qquad -\pi_{11}\beta_{21} + \pi_{21} = 0$$

$$(2) \qquad -\pi_{12}\beta_{21} + \pi_{22} = 0$$

$$(3) \qquad -\pi_{13}\beta_{21} + \pi_{23} = \gamma_{23}$$

  De la primera y segunda ecuaciones obtenemos que $\beta_{21} = \frac{\pi_{21}}{\pi_{11}} = \frac{\pi_{22}}{\pi_{12}}$. Por lo tanto, la sobreidentificación implica la restricción no lineal:

$$\frac{\pi_{21}}{\pi_{11}} = \frac{\pi_{22}}{\pi_{12}}$$

  Además que $\pi_{11} \neq 0$ y $\pi_{12} \neq 0$ Estas condiciones implican que los instrumentos para esta ecuación, que son las variables exógenas omitidas, ya que la variable x_3 ya está por defecto por estar incluída en la ecuación, han de estar correlacionadas con la variable endógena que aparece como variable explicativa en la ecuación, esto es, la variable a instrumentalizar y_1.
  Una vez obtenido el parámetro estructural β_{21}, el parámetro γ_{23} se obtiene de

$$-\pi_{13}\beta_{21} + \pi_{23} = \gamma_{23}$$