Inferencia y Especificación en Modelos de Ecuaciones Simultáneas

OCW 2013 Marta Regúlez Castillo

Economía Aplicada III (UPV/EHU)

OCW 2013

Contenidos

1. Inferencia con estimadores de información limitada
   - Propiedades de los estimadores MCI, MC2E
   - Contrastes de restricciones con MCI y MC2E
2. Inferencia con estimadores de información completa
   - Propiedades de los estimadores MC3E y MVIC
   - Contrastes de restricciones lineales con MC3E
3. Contrastes de Especificación
   - Contrastes de sobreidentificación
   - Contrastes de exogeneidad

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

La ecuacion de interés de la forma estructural es

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Z_j}_{Tx(G_j+K_j)} \underbrace{\delta_j}_{(G_j+K_j)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_j \sim (\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$$

donde $Z_j = [Y_j \;\; X_j] \qquad \delta_j = \begin{bmatrix} \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix}$.

- Las variables endógenas $\mathbf{y}_j$, Y_j se determinan en el sistema conjuntamente a partir de los errores estructurales $u_j \quad j = 1, \cdots, G \longrightarrow Y_j$ no son independientes de u_j.
- En general Y_j estarán correlacionados con el término de perturbación de la ecuación $u_j \longrightarrow E(Y_j' u_j) \neq 0$.
- Las variables exógenas X son independientes de los errores estructurales $\longrightarrow E(X' u_j) = 0$.

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

Hemos obtenido los estimadores de MCI y MC2E de los parámetros δ_j de interés como estimadores de Variables Instrumentales:

$$\hat{\delta}_j^{MCI} = \left(X'Z_j\right)^{-1} X' \mathbf{y}_j = \delta_j + \left(X'Z_j\right)^{-1} X' \mathbf{u}_j$$

donde la matriz de instrumentos es X, la matriz de datos de las variables exógenas del sistema.

$$\hat{\delta}_j^{MC2E} = \left(\hat{Z}_j' Z_j\right)^{-1} \hat{Z}_j' \mathbf{y}_j = \delta_j + \left(\hat{Z}_j' Z_j\right)^{-1} \hat{Z}_j' \mathbf{u}_j$$

donde la matriz de instrumentos es $\hat{Z}_j = \left[\hat{Y}_j \;\; X_j\right] = \left[X(X'X)^{-1}X'Y_j \quad X_j\right] = [P_X Y_j \quad X_j]$. En el caso de exacta identificación ambos estimadores coinciden.

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

- Las propiedades de estos estimadores para muestras finitas en general son desconocidas.
- Son estimadores no lineales dado que la matriz Z_j, donde se incluye Y_j, aparece de forma no lineal en la expresión del estimador.
- En general serán estimadores sesgados, $E(\hat{\delta}_j^{MC2E}) \neq \delta_j$ y $E(\hat{\delta}_j^{MCI}) \neq \delta_j$ ya que Y_j no son independientes de $\mathbf{u}_j$, por lo que $E(\mathbf{u}_j \setminus Z_j, X) \neq E(\mathbf{u}_j) = 0$.
- Bajo ciertas condiciones se pueden obtener para estos estimadores propiedades asintóticas: consistencia y normalidad asintótica.

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

Para analizar la consistencia consideramos el límite en probabilidad del estimador,

$$plim\ \hat{\delta}_j^{MCI} = \delta_j + \left(plim\ \frac{1}{T} X' Z_j \right)^{-1} plim\ \left(\frac{1}{T} X'\ \mathbf{u}_j \right)$$

$$plim\ \hat{\delta}_j^{MC2E} = \delta_j + \left(plim\ \frac{1}{T} \hat{Z}_j' Z_j \right)^{-1} plim\ \left(\frac{1}{T} \hat{Z}_j' \mathbf{u}_j \right)$$

Bajo las condiciones del teorema de Mann-Wald, y suponiendo que $plim\left(\frac{1}{T} X' Z_j\right) = Q_{XZ_j}$ es una matriz finita y definida positiva:

$$plim\ \hat{\delta}_j^{MCI} = \delta_j + \left(plim\ \frac{1}{T} X' Z_j \right)^{-1} plim\ \left(\frac{1}{T} X'\ \mathbf{u}_j \right) = \delta_j + Q_{XZ_j}^{-1}\ \mathbf{0}$$

Entonces, el estimador $\hat{\delta}_j^{MCI}$ es consistente: $plim\, \hat{\delta}_j^{MCI} = \delta_j$

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

• Si la ecuación está identificada $plim\, \frac{1}{T}\hat{Z}_j' Z_j$ será invertible y bajo las condiciones del Teorema de Mann y Wald:

$$plim\, \hat{\delta}_j^{MC2E} = \delta_j + \left(plim\, \frac{1}{T}\, \hat{Z}_j' Z_j \right)^{-1} plim\, \left(\frac{1}{T}\, \hat{Z}_j'\, \mathbf{u}_j \right) = \delta_j + Q_{\hat{Z}_j Z_j}^{-1}\ \mathbf{0}$$

El estimador MC2E es consistente: $plim\, \hat{\delta}_j^{MC2E} = \delta_j$

• Distribución asintótica: utilizando el Teorema de Wald y el Teorema de Cramer,

$$\sqrt{T}\left(\hat{\delta}_j^{MCI} - \delta_j\right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0},\ \ \sigma_j^2 Q_{XZ_j}^{-1} Q_{XX} Q_{Z_jX}^{-1}\right)$$

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

Un estimador consistente de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica es:

$$\widehat{Va}(\sqrt{T}\hat{\delta}_j^{MCI}) = T\,\hat{\sigma}_j^2\,(X'Z_j)^{-1}\,(X'X)\,(Z_j'X)^{-1}$$

siendo $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_j\hat{\mathbf{u}}_j'}{T} = \frac{1}{T}\left(\mathbf{y}_j - Z_j\hat{\delta}_j^{MCI}\right)'\left(\mathbf{y}_j - Z_j\hat{\delta}_j^{MCI}\right)$.

Esto mismo aplica para el caso del estimador MC2E con identificación exacta, ya que ambos estimadores en ese caso coinciden.

Propiedades de los estimadores MCI, MC2E

Utilizando el Teorema de Mann y Wald y el Teorema de Cramer,

$$\sqrt{T}\left(\hat{\delta}_j^{MC2E} - \delta_j\right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0},\ \sigma_j^2 Q_{\hat{Z}_j Z_j}^{-1}\right)$$

Un estimador consistente de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica es

$$\widehat{Va}(\sqrt{T}\hat{\delta}_j^{MC2E}) = T\,\hat{\sigma}_j^2\left[\left(Z_j'X\right)\left(X'X\right)^{-1}\left(X'Z_j\right)\right]^{-1}$$

siendo $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_j\hat{\mathbf{u}}_j'}{T} = \frac{1}{T}\left(\mathbf{y}_j - Z_j\hat{\delta}_j^{MC2E}\right)'\left(\mathbf{y}_j - Z_j\hat{\delta}_j^{MC2E}\right)$

Es incorrecto calcular $\hat{\sigma}_j^2$ utilizando la suma de cuadrados residual de la segunda etapa, ya que en ese caso se obtendrían los residuos de forma incorrecta como $\left(\mathbf{y}_j - \hat{Z}_j\hat{\delta}_j^{MC2E}\right)$.

Contrastes de restricciones con MCI y MC2E

Utilizando los resultados anteriores podemos derivar el estadístico de Wald para contrastar restricciones lineales sobre δ_j. En general, podemos escribir la hipótesis nula y la alternativa como:

$$\begin{array}{lcccc} H_0: & R & \cdot & \delta_j & = & r \\ & (q \times (G_j + K_j)) & & ((G_j + K_j) \times 1) & & (q \times 1) \\ H_A: & R\delta_j \neq r & & & & \end{array}$$

siendo q el número de restricciones bajo la hipótesis nula y $G_j + K_j$ el número de parámetros en la ecuación estructural de interés $\mathbf{y}_j = Z_j\, \delta_j + \mathbf{u}_j$.
El estadístico de contraste y su distribución asintótica bajo H_0 son:

$$T(R\,\hat{\delta}_j - r)'\,[R\,\widehat{Va}(\sqrt{T}\hat{\delta}_j)\,R']^{-1}\,(R\,\hat{\delta}_j - r) \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_q$$

Contrastes de restricciones con MCI y MC2E

Para el caso de MCI o MC2E con exacta identificación, la expresión del estadístico para $q \geq 1$ quedaría

$$\left(R\,\hat{\delta}_j^{MCI} - r\right)' \left[R\,\hat{\sigma}_j^2 \left(X'Z_j\right)^{-1} \left(X'X\right) \left(Z_j'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\,\hat{\delta}_j^{MCI} - r\right) \xrightarrow{d,H_0} \chi_q^2$$

y para MC2E en general,

$$\left(R\,\hat{\delta}_j^{MC2E} - r\right)' \left[R\,\hat{\sigma}_j^2 \underbrace{\left[\left(Z_j'X\right) \left(X'X\right)^{-1} \left(X'Z_j\right)\right]^{-1}}_{\left(\hat{Z}_j'\hat{Z}_j\right)^{-1}} R'\right]^{-1} \left(R\,\hat{\delta}_j^{MC2E} - r\right) \xrightarrow{d,H_0} \chi_q^2$$

Contrastes de restricciones con MCI y MC2E

Para $q = 1$, el estadístico en cada caso quedaría,

$$\frac{\left(R\,\hat{\delta}_j^{MCI} - r\right)}{\sqrt{R\,\hat{\sigma}_j^2\,\left(X'Z_j\right)^{-1}\left(X'X\right)\left(Z_j'X\right)^{-1}\,R'}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{\left(R\,\hat{\delta}_j^{MC2E} - r\right)}{\sqrt{R\,\hat{\sigma}_j^2\,\left[\left(Z_j'X\right)\left(X'X\right)^{-1}\left(X'Z_j\right)\right]^{-1}\,R'}} \xrightarrow{d,H_0} \mathcal{N}(0,1)$$

Dado un nivel de significación, la regla de decisión del contraste en cada caso será la habitual, bien utilizando el valor crítico en la distribución asintótica bajo H_0 o el valor p.

Propiedades del estimador MC3E

Bajo las condiciones de identificación de todas las ecuaciones del sistema y suponiendo que las perturbaciones del sistema satisfacen $\mathbf{u} \sim (\mathbf{0}, (\Sigma \bigotimes I_T))$, la distribución asintótica del estimador MC3E es

$$\sqrt{T}\left(\hat{\delta}^{MC3E} - \delta\right) \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0},\ \ plim\left(\frac{1}{T}\hat{Z}'\left(\widehat{\Sigma}^{-1} \bigotimes I\right)\hat{Z}\right)^{-1}\right)$$

Un estimador consistente de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica es

$$\widehat{Va}(\sqrt{T}\hat{\delta}^{MC3E}) = T\left(\hat{Z}'\left(\widehat{\Sigma}^{-1} \bigotimes I\right)\hat{Z}\right)^{-1}$$

Propiedades del estimador MC3E y MVIC

- El estimador MC3E es asintóticamente el más eficiente de entre todos los estimadores de Variables Instrumentales que sólo utilizan la información muestral incorporada en el sistema.
- Para perturbaciones normalmente distribuidas, MC3E tiene la misma distribución asintótica que el estimador de MVIC.
- Si el supuesto de Normalidad es cierto y todas las restricciones a priori impuestas de identificación son correctas, el estimador MVIC es consistente y asintóticamente eficiente.
- La matriz asintótica de varianzas y covarianzas para el estimador de MVIC bajo Normalidad es idéntica a la del estimador MC3E.

Contrastes de restricciones lineales con MC3E

El estadístico de Wald para contrastar restricciones lineales sobre δ se puede derivar utilizando los resultados anteriores:

Para un contraste general de restricciones lineales sobre los coeficientes del sistema:

$$H_0 : \underset{(q \times \sum_{j=1}^{G}(G_j + K_j))}{R} \cdot \underset{(\sum_{j=1}^{G}(G_j + K_j) \times 1)}{\delta} = \underset{(q \times 1)}{r}$$

$$H_A : R\delta \neq r$$

El estadístico de Wald de contraste y su distribución asintótica bajo H_0 son:

$$T(R\,\hat{\delta}_{MC3E} - r)' \left[R\,\widehat{Va}(\sqrt{T}\hat{\delta}_{MC3E})\,R'\right]^{-1} (R\,\hat{\delta}_{MC3E} - r) \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_q$$

Contrastes de Especificación: Introducción

Partimos de la especificación de un modelo estructural lineal

$$YB' + X\Gamma' = U$$

donde Y es la matriz (TxG) de observaciones de las variables endógenas, X es la matriz (TxK) de observaciones de las variables predeterminadas y/o exógenas, U es la matriz (TxG) de perturbaciones estructurales.
La especificación del modelo que consideraremos bajo la hipótesis nula a contrastar es aquél donde las matrices de coeficientes B y Γ están sujetas a restricciones *a priori* las cuales permiten la identificación de la ecuación o ecuaciones a examinar. Por simplicidad, suponemos que estas restricciones son de exclusión, por lo que ciertos elementos de B y Γ serán ceros.

Contrastes de Especificación: Introducción

- Se tiene que decidir si se contrastará todo el sistema en su conjunto o si se va a considerar cada ecuación separadamente.
- La primera aproximación puede requerir en ocasiones un importante coste computacional y tamaños muestrales relativamente grandes para que la teoría asintótica sea una aproximación adecuada.
- La inadecuada especificación de alguna de las ecuaciones puede llevar a rechazar la especificación de todo el sistema. Tiene la ventaja de poderse utilizar a la hora de desarrollar un contraste de especificación del sistema en su conjunto.
- Si se rechaza la adecuada especificación del sistema se puede considerar estimar cada ecuación por separado.

Contrastes de Especificación: Introducción

- En el caso de contrastes en una ecuación basados en información limitada, consideramos una ecuación del sistema que está sobreidentificada, por lo que $K_j^* - G_j > 0$.
- Esto permite llevar a cabo un contraste de la validez de los instrumentos, de las condiciones de ortogonalidad de estos con las perturbaciones y a su vez de la adecuación de la especificación de la ecuación propuesta en concreto.
- Bajo la hipótesis nula, el número de restricciones es el nñumero de restricciones de sobreidentificación d_j.

Contrastes de Especificación: Introducción

- Si no hay sobreidentificación entonces esto no se puede llevar a cabo, ya que tenemos exactamente los instrumentos que necesitamos para poder identificar los parámetros de la ecuación estructural.
- Este tipo de contraste se puede realizar también considerando el sistema en su conjunto siempre y cuando alguna o algunas de las ecuaciones estén sobreidentificadas.
- En este caso, el número de restricciones a contrastar bajo la hipótesis nula de correcta especificación del sistema serán $\sum_{j=1}^{G} d_j$.

Contrastes basados en información limitada

- **Contraste de razón de verosimilitudes de Anderson y Rubin**.

$$LR_j = T(\hat{\lambda}_j - 1) \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_{(K_j^* - G_j)}$$

donde $\hat{\lambda}_j$ es el menor valor propio asociado a la estimación MVIL de la ecuación j-ésima.

En Gretl al estimar por MVIL, el ouput del programa computa una variante de este estadístico, $T\, ln\, \hat{\lambda}_j$, que para valores de $\hat{\lambda}_j$ cercanos a 1 es una buena aproximación a LR_j.

Contrastes basados en información limitada

- **Estadístico de Sargan**.

$$TR_u^2 = T\,\frac{\hat{\mathbf{u}}_j' X(X'X)^{-1}X'\hat{\mathbf{u}}_j}{\hat{\mathbf{u}}_j'\hat{\mathbf{u}}_j}$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_j = y_j - Z_j\hat{\delta}_j$ siendo $\hat{\delta}_j$ bien el estimador MC2E o el de MVIL. Por lo tanto el R_u^2 es el coeficiente de determinación no centrado de la regresión por MCO de $\hat{\mathbf{u}}_j$ sobre todas las variables exógenas o predeterminadas X.
Bajo la hipótesis nula de correcta especificación de la ecuación j-ésima el estadístico

$$TR_u^2 \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_{(K_j^* - G_j)}$$

Contrastes basados en información limitada

- **Estadístico de Basmann**.

$$F = \frac{\hat{\mathbf{u}}_j' X(X'X)^{-1}X'\hat{\mathbf{u}}_j/(K_j^* - G_j)}{(\hat{\mathbf{u}}_j'\hat{\mathbf{u}}_j - \hat{\mathbf{u}}_j' X(X'X)^{-1}X'\hat{\mathbf{u}}_j)/(T-K)} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_j' P_X \hat{\mathbf{u}}_j/(K_j^* - G_j)}{\hat{\mathbf{u}}_j' M_X \hat{\mathbf{u}}_j/(T-K)} = \frac{T-K}{K_j^* - G_j}(\hat{\lambda}_j' - 1)$$

donde $\hat{\lambda}_j'$ se obtiene utilizando $\hat{\beta}_{j,MC2E}^{+\prime}$ en lugar de $\hat{\beta}_{j,MVIL}^{+\prime}$.

◦ El estadístico de Basmann se distribuye bajo la hipótesis nula de correcta especificación de la ecuación j-ésima como una $F[(K_j^* - G_j),(T-K)]$.

◦ Se puede utilizar la misma regresión auxiliar de los residuos MC2E sobre X para obtener ambos estadísticos, Sargan y Basmann.

Contrastes basados en Información Completa

• **Contraste de Razón de Verosimilitudes**.
El contraste se construye comparando el valor del logaritmo de la función de verosimilitud una vez estimado el modelo no restringido sin imponer las restricciones de sobreidentificación (modelo exactamente identificado) con el modelo restringido (se imponen restricciones no lineales en los parámetros de la forma reducida).

$$LR = T\left(ln \mid W_R \mid - ln \mid W_U \mid\right) \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_{(\Sigma_{j=1}^{G}(K_j^* - G_j))}$$

donde $W = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\mathbf{v}}_t \, \hat{\mathbf{v}}_t'$ siendo
$\hat{v}_{it} = y_{it} - \hat{\pi}_{i1}x_{1t} - \hat{\pi}_{i2}x_{2t} - \cdots - \hat{\pi}_{iK}x_{Kt} = y_{it} - \hat{\pi}_i'\mathbf{x}_t$ utilizando el estimador de $\pi_i, i = 1, \cdots, G$ en cada caso, restringido y sin restringir.

Contrastes basados en Información Completa

- **Contraste de Hansen-Sargan**.

En este caso se contrasta la especificación de todo el sistema en su conjunto, o todas las restricciones de sobreidentificación. Para ello se utiliza un estimador de información completa, bien 3SLS o bien MVIC.

Dado el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Z_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & Z_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_G \end{bmatrix}$$

donde $J = \sum_{j=1}^{G}(G_j + K_j)$ y $\mathbf{u} \sim (\mathbf{0}, (\Sigma \bigotimes I_T))$ y todas las ecuaciones están identificadas tal que $\Sigma_{j=1}^{G}(K_j^* - G_j) > 0$.

Contrastes basados en Información Completa

Una vez obtenidos el estimador de δ por MC3E se evalúa la función que minimiza este estimador, utilizando un estimador consistente de Σ, por ejemplo, el basado en los residuos de estimar cada ecuación por MC2E. Esta variable aleatoria, resultante de evaluar el criterio que minimiza $\hat{\delta}_{MC3E}$, es

$$(\mathbf{y} - Z\,\hat{\delta}_{MC3E})'(\hat{\Sigma}^{-1} \bigotimes X(X'X)^{-1}X')(\mathbf{y} - Z\,\hat{\delta}_{MC3E}) = \hat{\mathbf{u}}'(\hat{\Sigma}^{-1} \bigotimes P_X)\hat{\mathbf{u}}$$

y tiene bajo la hipótesis nula de correcta especificación del sistema una distribución asintótica $\chi^2_{(\Sigma_{j=1}^{G}(K_j^* - G_j))}$.

Contrastes de exogeneidad: Introducción

- En el modelo de ecuaciones simultáneas se especifica en cada ecuación cuales son las variables endógenas incluidas y cuales son las exógenas o predeterminadas incluidas y excluidas en cada ecuación. Estas variables exogenas se suponen incorreladas con los términos de perturbación estructurales.
- Estos contrastes tratan de diagnosticar si existe evidencia de la existencia de variables consideradas como exógenas que puedan no serlo. En este sentido se trata de contrastar la ortogonalidad entre esas variables y los términos de perturbación estructurales o, asintóticamente, $plim \frac{1}{T}(X'U) = 0$.

Contraste de Hausman

- J.A. Hausman en su artículo "Specification Tests in Econometrics"que está publicado en la prestigiosa revista Econometrica (Vol. 46, No. 6 Nov. 1978, pp. 1251-1271), presenta la forma de contrastar una incorrecta especificación del modelo tal que no se satisfaga el supuesto de ortogonalidad entre regresores y el término de perturbación.
- En el contexto de un modelo de regresión estandar esto se puede deber a errores de medida en las variables explicativas, omisión de variables o factores no observables correlacionados con las variables incluidas o endogeneidad de ciertos regresores que se determinan simultáneamente con la variable dependiente.

Contraste de Hausman

En el contexto de una ecuación,

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Y_j}_{TxG_j}\underbrace{\beta_j}_{G_jx1} + \underbrace{X_j}_{TxK_j}\underbrace{\gamma_j}_{K_jx1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_j \sim N(\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$$

Se quiere contrastar si las variables en Y_j son o no endógenas. En este caso bajo la hipótesis nula, todas las variables explicativas estarían incorrelacionadas con $\mathbf{u}_j$ y bajo la alternativa, las variables en Y_j serían endógenas y estarían correlacionadas con el término de error. Las variables en X_j se las considera en ambos casos ortogonales al término de perturbación.

Contraste de Hausman

Los dos estimadores a comparar en el contexto de información limitada son el de MCO (bajo H_0 consistente y asintóticamente eficiente y bajo H_a inconsistente) y el de $MC2E$ (bajo H_0 y H_a consistente) donde se utilizan todos los posibles instrumentos $X = (X_j, X_j^*)$ siendo $K = K_j + K_j^*$.
En este caso, el estadístico de Hausman es

$$H = (\hat{\delta}_{j,MC2E} - \hat{\delta}_{j,MCO})' D^+ (\hat{\delta}_{j,MC2E} - \hat{\delta}_{j,MCO}) \xrightarrow{d,H_0} \chi^2_{(G_j)}$$

donde D^+ denota la inversa generalizada de la matriz

$$D = \hat{\sigma}_j^2 \left((Z_j' P_X Z_j)^{-1} - (Z_j' Z_j)^{-1} \right)$$

donde $\hat{\sigma}_j^2$ es un estimador consistente de σ_j^2 y $Z_j = (Y_j \; X_j)$.

Contraste de Hausman

Hay una forma más sencilla y equivalente de llevar a cabo el contraste de Hausman.

- Se obtienen los valores ajustados de Y_j dada la estimación de la forma reducida

$$\hat{Y}_j = X(X'X)^{-1}X'Y_j$$

  y lo residuos

$$\hat{V}_j = Y_j - \hat{Y}_j$$

- Estimar por MCO la ecuación

$$\mathbf{y}_j = Y_j\beta_j + X_j\gamma_j + \hat{V}_j\alpha_j + \epsilon_j$$

- Contrastar mediante un estadístico F usual la significatividad de $\hat{V}_j$ donde bajo $H_0 : \alpha_j = 0$, se contrastan G_j restricciones de exclusión.

Contraste de Hausman

- Finalmente, Hausman (1978) considera la aplicación de su contraste como un contraste de especificación del sistema de ecuaciones simultáneas en su conjunto.
- Se comparan los estimadores MC3E y MC2E del conjunto de parámetros del sistema.
- Para ello, al menos alguna ecuación ha de estar sobreidentificada por que sino ambos estimadores son iguales y su diferencia sería cero.

Contraste de Hausman

- Se considera que bajo la hipótesis nula de correcta especificación de todas las ecuaciones del sistema, el estimador de δ en el sistema por MC3E es consistente y asintóticamente eficiente pero bajo la hipótesis alternativa de mala especificación no es consistente. Esto ocurrirá si al menos una de las ecuaciones del sistema no está correctamente especificada.
- Por otro lado, el estimador de δ obtenido por $MC2E$ en cada una de las ecuaciones será consistente bajo la hipótesis nula pero no asintóticamente eficiente .
- Bajo la hipótesis alternativa, solamente se estimarán inconsistentemente por MC2E los parámetros de la ecuación o ecuaciones mal-especificadas.

Contraste de Hausman

El estimador MC3E de δ en el sistema es

$$\hat{\delta}_{MC3E} = \left(Z'\left(\widehat{\Sigma}^{-1} \bigotimes P_X\right) Z\right)^{-1} \left(Z'\left(\widehat{\Sigma}^{-1} \bigotimes P_X\right) \mathbf{y}\right)$$

y el estimador MC2E de δ obtenido ecuación por ecuación es

$$\hat{\delta}_{MC2E} = \left(Z'\left(I_G \bigotimes P_X\right) Z\right)^{-1} \left(Z'\left(I_G \bigotimes P_X\right) \mathbf{y}\right)$$

El estadístico de contraste es

$$H = (\hat{\delta}_{MC2E} - \hat{\delta}_{MC3E})'[\widehat{V(\hat{\delta}_{MC2E})} - \widehat{V(\hat{\delta}_{MC3E})}]^{-1}(\hat{\delta}_{MC2E} - \hat{\delta}_{MC3E})$$

Bajo la hipótesis nula de correcta especificación se distribuye asintóticamente como una χ^2 con J grados de libertad.