Estimación MC2E, MVIL en Modelos de Ecuaciones Simultáneas

OCW 2013 Marta Regúlez Castillo

Economía Aplicada III (UPV/EHU)

OCW 2013

Contents

Mínimos Cuadrados en 2 Etapas

- El método de Mínimos Cuadrados en dos Etapas (MC2E) también es un método de estimación de Modelos de Ecuaciones Simultáneas con información limitada.
- Esta técnica de estimación está indicada tanto si la ecuación está exactamente identificada como si está sobreidentificada.
- Se puede considerar como un método de estimación por Variables Instrumentales y en el caso de exacta identificación MC2E coincide con MCI. La demostración está cubierta en las lecturas recomendadas.

Mínimos Cuadrados en 2 Etapas

Consideremos la j-ésima ecuación estructural del Modelo de Ecuaciones Simultáneas, después de haberle impuesto todas las restricciones a priori y el convenio de normalización.

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Y_j}_{TxG_j} \underbrace{\beta_j}_{G_jx1} + \underbrace{X_j}_{TxK_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_jx1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1}$$

o de forma más compacta

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Z_j}_{Tx(G_j+K_j)} \underbrace{\delta_j}_{(G_j+K_j)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_j \sim (\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$$

donde $Z_j = \left[\underbrace{Y_j}_{TxG_j} \quad \underbrace{X_j}_{TxK_j} \right] \qquad \delta_j = \begin{bmatrix} \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix}.$

Mínimos Cuadrados en 2 Etapas

El método de MC2E, como su propio nombre indica, se puede llevar a cabo en dos etapas realizando una estimación por MCO en cada etapa:

- **1ª Etapa**: Se realiza la regresión de cada variable endógena en Y_j sobre **todas** las variables exógenas o predeterminadas del modelo. Esto es, se estima la forma reducida para Y_j:

$$\underbrace{Y_j}_{TxG_j} = \underbrace{X}_{TxK} \underbrace{\Pi'_j}_{KxG_j} + \underbrace{V_j}_{TxG_j} \longrightarrow \hat{\Pi}'_{j\,MCO} = (X'X)^{-1}X'Y_j$$

$\hat{\Pi}'_{j\,MCO} = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_1^{MCO} & \cdots & \hat{\pi}_{G_j}^{MCO} \end{bmatrix}$, donde las columnas de $\hat{\Pi}'_{j\,MCO}$ son respectivamente los coeficientes de la regresión de cada variable en Y_j sobre X. Se obtienen los valores ajustados de Y_j dada la estimación de la forma reducida

$$\hat{Y}_j = X(X'X)^{-1}X'Y_j$$

Mínimos Cuadrados en 2 Etapas

- **2ª Etapa** Se realiza la regresión de $\mathbf{y}_j$ sobre $\hat{Y}_j$ y X_j.

  Si denotamos la matriz de regresores de esta segunda regresión como $\hat{Z}_j = \begin{pmatrix} \hat{Y}_j & X_j \end{pmatrix}$, el estimador resultante de δ_j sería solución al sistema de ecuaciones normales

$$\left(\hat{Z}_j' \hat{Z}_j\right) \hat{\delta}_j^{MC2E} = \hat{Z}_j' \mathbf{y}_j$$

$$\begin{pmatrix} \hat{Y}_j' \hat{Y}_j & \hat{Y}_j' X_j \\ X_j' \hat{Y}_j & X_j' X_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_j^{MC2E} \\ \hat{\gamma}_j^{MC2E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_j \mathbf{y}_j \\ X_j' \mathbf{y}_j \end{pmatrix}$$

Mínimos Cuadrados en 2 Etapas

En la matriz $\hat{Z}_j = \left(\hat{Y}_j \; X_j \right)$ todas las columnas son funciones lineales de las K columnas de X.

- Si la ecuación satisface la condición de rango para la identificación, y por lo tanto también la de orden $(K \geq G_j + K_j)$, la matriz $\left(\hat{Z}_j' \hat{Z}_j \right)$ será de rango completo e invertible. El sistema tendrá una única solución,

$$\hat{\delta}_j^{MC2E} = \left(\hat{Z}_j' \hat{Z}_j \right)^{-1} \hat{Z}_j' \mathbf{y}_j$$

- Si la ecuación no está identificada, bien porque no se satisface la de orden o, aunque esta se satisfaga, porque no se satisface la de rango, el estimador $\hat{\delta}_j^{MC2E}$ no está bien definido. La matriz $(\hat{Z}_j' \hat{Z}_j)$ es de rango reducido por lo que no existe su inversa.

Mínimos Cuadrados en 2 Etapas

Dado que $P_X = X(X'X)^{-1}X'$ y $P_X X_j = X_j$ se tiene

$$\hat{Z}_j = \left[\hat{Y}_j \;\; X_j\right] = \left[X(X'X)^{-1}X'Y_j \;\; X_j\right] = [P_X Y_j \;\; P_X X_j] = P_X\,[Y_j \;\; X_j] = P_X Z_j$$

Utilizando este resultado podemos obtener que el estimador MC2E es un estimador de VI con matriz de instrumentos $\hat{Z}_j = \left[\hat{Y}_j \;\; X_j\right]$,

$$\hat{\delta}_j^{MC2E} = \left(\hat{Z}_j'\hat{Z}_j\right)^{-1}\hat{Z}_j'\mathbf{y}_j = \left(Z_j' \underbrace{P_X}_{P_X P_X} Z_j\right)^{-1} Z_j' \underbrace{P_X}_{P_X P_X} \mathbf{y}_j = \left(\hat{Z}_j' Z_j\right)^{-1}\hat{Z}_j'\mathbf{y}_j$$

y la siguiente forma de obtener el estimador MC2E de δ_j,

$$\hat{\delta}_j^{MC2E} = \left(Z_j'X\left(X'X\right)^{-1}X'Z_j\right)^{-1} Z_j'X\left(X'X\right)^{-1}X'\mathbf{y}_j$$

Máxima Verosimilitud Información Limitada

- El método de estimación por Máxima Verosimilitud Información Limitada (MVIL) también está dentro de la clase de estimadores con información Limitada.
- Considera la estimación de los parámetros estructurales de una ecuación, teniendo en cuenta solamente la función de verosimilitud de las variables endógenas de esa ecuación y las restricciones de identificación correspondientes a la ecuación a estimar.
- No se tiene en cuenta en la verosimilitud el resto de variables endógenas del sistema ni las restricciones de identificación impuestas en otras ecuaciones.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

Consideremos la ecuación j-ésima a estimar antes de imponer la normalización ($\beta_{jj} = 1$)

$$\beta_{jj} \underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Y_j}_{TxG_j} \underbrace{\beta_j}_{G_jx1} + \underbrace{X_j}_{TxK_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_jx1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_j & Y_j \end{bmatrix}}_{Tx(G_j+1)} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{jj} \\ -\beta_j \end{bmatrix}}_{(G_j+1)x1} = \underbrace{X_j}_{TxK_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_jx1} + \mathbf{u}_j \qquad \Leftrightarrow \qquad Y_j^+ \beta_j^+ = X_j \gamma_j + \mathbf{u}_j$$

Las ecuaciones de la Forma Reducida para Y_j^+ son las siguientes

$$\underbrace{Y_j^+}_{Tx(G_j+1)} = \underbrace{X_j}_{TxK_j} \underbrace{\Pi_{1j}^{+\prime}}_{K_jx(G_j+1)} + \underbrace{X_j^*}_{TxK_j^*} \underbrace{\Pi_{2j}^{+\prime}}_{K_j^*x(G_j+1)} + \underbrace{V_j^+}_{Tx(G_j+1)}$$

Máxima Verosimilitud Información Limitada

Senotamos por $\mathbf{y}_{jt}^{+\prime}$ y $\mathbf{x}_{jt}^{+\prime}$ a la fila t-ésima de Y_j^+ y de X respectivamente y por $\mathbf{v}_{jt}^{+\prime}$ al vector $(1x(G_j+1))$ correspondiente a la fila t-ésima de la matriz V_j^+.

$$\mathbf{y}_{jt}^{+} = \Pi_j^{+\prime}\mathbf{x}_{jt}^{+} + \mathbf{v}_{jt}^{+} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y}_{jt}^{+} - \mathbf{x}_{jt}^{+}\Pi_j^{+} = \mathbf{v}_{jt}^{+}$$

Dado el supuesto sobre la distribución de los errores estructurales $\mathbf{u}_t \sim NID(\mathbf{0}, \Sigma)$, el vector de errores de la forma reducida correspondiente a las ecuaciones de las variables Y_j^+ en el momento t, se distribuye $\mathbf{v}_{jt}^{+} \sim NID(\mathbf{0}, \Omega_j^+)$ donde Ω_j^+ es la submatriz correspondiente de Ω.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

La función de verosimilitud de Y_j^+ es:

$$L_j \quad = L(\Pi_j^+, \Omega_j^+; Y_j^+, X) = \prod_{t=1}^{T} L(\Pi_j^+, \Omega_j^+; \mathbf{y}_{jt}^+, \mathbf{x}_{jt}) =$$

$$= \prod_{t=1}^{T} \left((2\pi)^{-(G_j+1)/2} |\Omega_j^+|^{-1/2} \exp\left(-1/2)(\mathbf{y}_{jt}^+ - \mathbf{x}_{jt}^+ \Pi_j^+)'(\Omega_j^+)^{-1}(\mathbf{y}_{jt}^+ - \mathbf{x}_{jt}^+ \Pi_j^+)\right)$$

$$lnL_j = -(T(G_j+1)/2)\, ln\, 2\pi - T/2\, ln\, |\Omega_j^+| - 1/2 \left[\sum_{t=1}^{T} (\mathbf{y}_{jt}^+ - \mathbf{x}_{jt}^+ \Pi_j^+)'(\Omega_j^+)^{-1}(\mathbf{y}_{jt}^+ - \mathbf{x}_{jt}^+ \Pi_j^+) \right]$$

El estimador por máxima verosimilitud MVIL maximiza esta función sujeto a las restricciones que relacionan los parámetros estructurales de la ecuación j-ésima con los parámetros de la forma reducida.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

De las restricciones de exclusión de la ecuación j-ésima y la relación entre los parámetros de la F.E. y la F.R. obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\Pi_{1j}^{+'} \beta_j^+ = \gamma_j \qquad K_j \quad \texttt{ecuaciones} \tag{1}$$

$$\Pi_{2j}^{+'} \beta_j^+ = \mathbf{0} \qquad K_j^* \quad \texttt{ecuaciones} \tag{2}$$

Las primeras K_j ecuaciones sólo muestran cómo obtener γ_j dado β_j^+. Si podemos resolver para β_j^+ de (2), podemos utilizar esta solución en (1) para obtener γ_j y por lo tanto, los parámetros estructurales de la ecuación j estarán identificados.
La condición de Rango para la identificación de la ecuación establece que $rango(\Pi_{2j}^{+'}) = G_j$. La condición necesaria es que $G_j \geq K_j^*$.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

Hay tres casos a considerar:

- La ecuación está exactamente identificada. No hay restricciones sobre Π_{j2}^{+}. Dada la normalización

$$\pi_j^* - \Pi_{1j}^{*'}\beta_j = \mathbf{0} \Longrightarrow \beta_j = (\Pi_{1j}^{*'})^{-1}\pi_j^*$$

ya que la matriz $\Pi_{1j}^{*'}$ es cuadrada y de rango completo por lo que existe su inversa. El estimador de β_j y γ_j por MVIL se obtiene de

$$\hat{\beta}_j^{MVIL} = (\hat{\Pi}_{1j}^{*'})^{-1}\hat{\pi}_j^*$$

$$\hat{\gamma}_j = \hat{\pi}_j - \hat{\Pi}_{1j}'\hat{\beta}_j^{MVIL}$$

siendo el estimador de Π_j^{+} que maximiza el logaritmo de la verosimilitud el estimador MCO. El estimador de β_j y γ_j por MVIL coincide con MCI y entonces también con MC2E.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

- La ecuación no está identificada. No hay estimación posible. No podemos recuperar los parámetros estructurales a partir de los parámetros de la Forma Reducida.
- La ecuación esta sobreidentificada.
  ◦ La sobreidentificación impone restricciones sobre Π_j^+. Las restricciones (2) son importantes.

  ◦ En este caso la solución analítica al problema de maximizar lnL_j sujeto a $\Pi_{j2}^{+'}\beta_j^+ = \mathbf{0}$ con respecto a Π_j^+, β_j^+ y Ω_j^+ es extremadamente larga y complicada.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

El estimador MVIL de β_j^+ coincide con el estimador que minimiza el siguiente ratio de varianzas residuales:

$$l = \frac{\beta_j^{+\prime} A \beta_j^+}{\beta_j^+ S \beta_j^+} = \frac{\beta_j^{+\prime} Y_j^{+\prime} M_j Y_j^+ \beta_j^+}{\beta_j^{+\prime} Y_j^{+\prime} M Y_j^+ \beta_j^+}$$

siendo $M_j = I_T - X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'$ y $M = I_T - X(X'X)^{-1}X'$.

∘ El numerador del ratio de varianzas l es la suma de cuadrados residual de la regresión de $\tilde{y}_j \equiv Y_j^+\beta_j^+$, dado β_j^+, sobre las variables exógenas X_j que son las incluidas en la ecuación estructural a estimar

$$\underbrace{Y_j^+\beta_j^+}_{\tilde{y}_j} = X_j\gamma_j + u_j$$

Máxima Verosimilitud Información Limitada

∘ El denominador del ratio de varianzas l es la suma de cuadrados residual de la regresión de $\tilde{y}_j \equiv Y_j^+ \beta_j^+$, dado β_j^+, sobre todas las variables exógenas X.

Una vez obtenido el estimador de β_j^+, impuesta la normalización, que minimiza ese ratio de varianzas residuales, $\hat{\beta}_j^{+\prime} = (1, \ -\hat{\beta}_j^{MVIL})$, el estimador MVIL de γ_j se puede obtener de resolver para $\hat{\gamma}_j$

$$X_j'(\mathbf{y}_j - Y_j\hat{\beta}_j^{MVIL}) = X_j'X_j\hat{\gamma}_j \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma}_j^{MVIL} = (X_j'X_j)^{-1}X_j'(\mathbf{y}_j - Y_j\hat{\beta}_j^{MVIL})$$

que es el resultado de la regresión de $(\mathbf{y}_j - Y_j\hat{\beta}_j^{MVIL})$ sobre X_j.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

El estimador $\hat{\beta}_j^{MVIL}$ se puede obtener como sigue:

a) Calcular las matrices

$$S_j^0 = Y_j^{+\prime} M_j Y_j^+ = Y_j^{+\prime}(I_T - X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j')Y_j^+ = E_j^{0\prime} E_j^0$$

$$S_j^1 = Y_j^{+\prime} M Y_j^+ = Y_j^{+\prime}(I_T - X(X'X)^{-1}X')Y_j^+ = E_j^{1\prime} E_j^1$$

Cada columna de $E_j^0 = M_j Y_j^+$ es el vector de residuos minimocuadráticos obtenidos de la regresión de la columna correspondiente de Y_j^+ sobre X_j.
Para $E_j^1 = MY_j^+$ es lo mismo pero incluyendo en las regresiones también a X_j^*, esto es todas las variables exógenas X.

Máxima Verosimilitud Información Limitada

b) Se obtienen las raíces características de la matriz $(S_j^1)^{-1}S_j^0$ o equivalentemente de la matriz $D = (S_j^1)^{-1/2}S_j^0(S_j^1)^{-1/2}$. Todas las raíces son reales y mayores o iguales a la unidad.

$\longrightarrow$ Se elige la menor raíz característica λ_1

c) Particionamos la matriz S_j^0 y S_j^1

$$S_j^0 = \begin{pmatrix} s_{jj}^0 & \mathbf{s}_j^{0\prime} \\ \underline{\mathbf{s}}_j^0 & S_{jj}^0 \end{pmatrix} \qquad S_j^1 = \begin{pmatrix} s_{jj}^1 & \mathbf{s}_j^{1\prime} \\ \underline{\mathbf{s}}_j^1 & S_{jj}^1 \end{pmatrix}$$

Con estos elementos disponibles se puede obtener

$$\hat{\beta}_j^{MVIL} = \left[S_{jj}^0 - \lambda_1 S_{jj}^1\right]^{-1}(\mathbf{s}_j^0 - \lambda_1 \mathbf{s}_j^1)$$

Si la ecuación está identificada, puede demostrarse que $\lambda_1 = 1$, lo que conduce a que $MVIL = MCI = MC2E$.