# Estimación MCO, MCI en Modelos de Ecuaciones Simultáneas

OCW 2013 Marta Regúlez Castillo

Economía Aplicada III (UPV/EHU)

OCW 2013

# Contents

# Estimador MCO de la F.E.

Consideremos la j-ésima ecuación estructural del Modelo de Ecuaciones Simultáneas.

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Y_j}_{TxG_j} \underbrace{\beta_j}_{G_jx1} + \underbrace{X_j}_{TxK_j} \underbrace{\gamma_j}_{K_jx1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_j \sim (\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$$

o de forma más compacta

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Z_j}_{Tx(G_j+K_j)} \underbrace{\delta_j}_{(G_j+K_j)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_j \sim (\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$$

donde $Z_j = [Y_j \;\; X_j] \quad \delta_j = \begin{bmatrix} \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix}$.

El estimador MCO de $\delta_j$ se define como:

$$\hat{\delta}_j^{MCO} = (Z_j'Z_j)^{-1}Z_j'\mathbf{y}_j = \delta_j + (Z_j'Z_j)^{-1}Z_j'\mathbf{u}_j$$

# Sesgo de simultaneidad: Inconsistencia de MCO

En general, al incluir la matriz de regresores $Z_j$ a variables endógenas $Y_j$ que son regresores estocásticos:

- No son independientes de $\mathbf{u}_j \longrightarrow \hat{\delta}_j^{MCO}$ no lineal y sesgado, siendo desconocida su distribución exacta para muestras finitas.
- En general $E(Y_j u_j) \neq 0 \longrightarrow plim\, \hat{\delta}_j^{MCO} \neq \delta_j$ Inconsistencia.

**Teorema**: Dado que $plim\left(\frac{1}{T} X_j' U\right) = 0$ y $plim\left(\frac{1}{T} X' X\right) = M$ matriz $(KxK)$ finita y definida positiva, si $plim\left(\frac{1}{T} Y_j' \mathbf{u}_j\right) \neq 0$ entonces $plim\, \hat{\delta}_j^{MCO} \neq \delta_j$ por lo que el estimador MCO de $\delta_j$ no es consistente.

**Forma Reducida (F.R.)**:

$$\mathbf{y}_t = \Pi \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \qquad t = 1, \ldots, T \qquad \mathbf{v}_t \sim NID(0, \Omega)$$

donde $\underbrace{\Pi}_{GxK} = -B^{-1}\Gamma$ y $\mathbf{v}_t = B^{-1}\mathbf{u}_t$ y $\Omega = B^{-1}\Sigma(B^{-1})'$.

Utilizando la notación anterior también podemos expresar la Forma Reducida como:

$$\underbrace{Y}_{TxG} = \underbrace{X}_{TxK} \underbrace{\Pi'}_{KxG} + \underbrace{V}_{TxG}$$

donde $\Pi' = -\Gamma'\left(B'\right)^{-1}$, y $V = U\left(B'\right)^{-1} \equiv UD$

Si escribimos todas las ecuaciones de la Forma Reducida de la forma:

$$\underbrace{Y}_{TxG} = \underbrace{X}_{TxK} \underbrace{\Pi'}_{KxG} + \underbrace{V}_{TxG}$$

El estimador MCO de $\Pi'$ es

$$\hat{\Pi}'_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Considerando la ecuación j-ésima de la Forma Reducida:

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{T\times 1} = \underbrace{X}_{T\times K} \underbrace{\pi_j}_{K\times 1} + \mathbf{v}_j$$

donde

$$\pi_j' = \begin{bmatrix} \pi_{j1} & \pi_{j2} & \cdots & \pi_{jK} \end{bmatrix}$$

Podemos obtener cada columna de $\hat{\Pi}'$ de la estimación MCO ecuación por ecuación: $\hat{\pi}_j^{MCO} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_j$ siendo la columna j-ésima de $\hat{\Pi}'_{MCO} = \left[\hat{\pi}_1^{MCO} \ \cdots \ \hat{\pi}_G^{MCO}\right]$.

**Teorema**:

Dado que $plim\left(\frac{1}{T}X'\,U\right) = 0$ para y $plim\left(\frac{1}{T}X'\,X\right) = M$ matriz $(KxK)$ finita y definida positiva, el estimador MCO de $\Pi'$ es consistente.

# Forma Reducida como un SURE

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & X & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_G \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{y}}_{GTx1} = \underbrace{(I_G \bigotimes X)}_{GTxGK} \underbrace{\Psi}_{GKx1} + \underbrace{\mathbf{v}}_{GTx1}$$

donde $\mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, (\Omega \bigotimes I_T))$.

$$E(\mathbf{v}\mathbf{v}') = (\Omega \bigotimes I_T) = \begin{bmatrix} w_1^2 I_T & w_{12} I_T & \cdots & w_{1G} I_T \\ w_{12} I_T & w_2^2 I_T & \cdots & w_{2G} I_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{G1} I_T & w_{G2} I_T & \cdots & w_G I_T \end{bmatrix}$$

# Forma Reducida: Estimación MCG equivalente a MCO

• La Forma Reducida no restringida es un sistema de ecuaciones aparentemente no relacionadas (SURE) donde en cada ecuación tenemos la misma matriz de datos de las variables exógenas.
• Por esa razón, estimar el sistema por un método que tenga en cuenta la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones, como es MCG(F), no aporta nada en términos de eficiencia ya que es idéntico a estimar por MCO cada ecuación por separado.

$$\hat{\Psi}_{MCG} = \left((I_G \bigotimes X)'(\Omega \bigotimes I_T)^{-1}(I_G \bigotimes X)\right)^{-1} \left((I_G \bigotimes X)'(\Omega \bigotimes I_T)^{-1}\mathbf{y}\right) =$$

$$= \left((\Omega^{-1} \bigotimes X'X)\right)^{-1} \left((\Omega^{-1} \bigotimes X')\mathbf{y}\right) = \left(I_G \bigotimes (X'X)^{-1}X'\right)\mathbf{y} = \hat{\Psi}_{MCO}$$

# Mínimos Cuadrados Indirectos

- Es un método de estimación con información limitada.
- Se estima una ecuación aislada de la Forma Estructural.
- No se utiliza la especificación concreta del resto de ecuaciones.
- La información de la matriz de varianzas y covarianzas del vector de perturbaciones no se utiliza.
- Está indicado cuando la ecuación está exactamente identificada.
- Es un método de estimación por Variables Instrumentales.

# Mínimos Cuadrados Indirectos

Este método consiste en:

1) Estimar la matriz de coeficientes de la forma reducida $\Pi$ por MCO ecuación por ecuación,

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{X}_{TxK} \underbrace{\pi_j}_{Kx1} + \mathbf{v}_j$$

$$\hat{\pi}_j^{MCO} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{y}_j \qquad j = 1, \ldots, G$$

$$\hat{\Pi}'_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$\hat{\Pi}'_{MCO} = \left[\hat{\pi}_1^{MCO} \;\; \cdots \;\; \hat{\pi}_G^{MCO}\right]$, donde $\hat{\pi}_j^{MCO} \quad j = 1, \ldots G$ son las columnas de $\hat{\Pi}'_{MCO}$.

# Mínimos Cuadrados Indirectos

2) Obtener las estimaciones de los coeficientes estructurales de la ecuación de interés, $B_j$ y $\Gamma_j$, a partir del sistema de ecuaciones que relaciona $\Pi$ con $B_j$ y $\Gamma_j$. Las relaciones entre los coeficientes estructurales de esa ecuación y los coeficientes de la forma reducida vienen dados por

$$\Pi' B_j = -\Gamma_j \quad \Leftrightarrow \quad \Pi' \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -\beta_j \\ \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \gamma_j \\ \mathbf{0} \end{array} \right]$$

# Mínimos Cuadrados Indirectos

3) Utilizando la estimación de $\Pi'$ se obtienen $\hat{\beta}_j^{MCI}$ y $\hat{\gamma}_j^{MCI}$ de resolver el sistema de K ecuaciones:

$$(X'X)^{-1}X'Y \begin{bmatrix} 1 \\ -\hat{\beta}_j^{MCI} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_j^{MCI} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

En total son $K$ ecuaciones con $(G_j + K_j)$ incógnitas. Si la ecuación no está identificada bien porque no se satistace la condición necesaria

$$K_j^* < G_j \Leftrightarrow K < G_j + K_j$$

lo que implicaría menos ecuaciones que incógnitas, o no se satisface la de rango aún satisfaciéndose la de orden, no se podría resolver de forma única el sistema de ecuaciones. Habría infinitas soluciones.

# Mínimos Cuadrados Indirectos

- Si la ecuación está exactamente identificada y se satisface la condición de rango el sistema tiene una única solución para $\hat{\beta}_j^{MCI}$ y $\hat{\gamma}_j^{MCI}$. La condición necesaria para la **identificación exacta** es

$$K_j^* = G_j \Leftrightarrow K = G_j + K_j$$

  En este caso, el número de ecuaciones y de incógnitas es el mismo.

- Si la ecuación está sobreidentificada, y se satisface la condición de rango, entonces hay más ecuaciones que incógnitas

$$K_j^* > G_j \Leftrightarrow K > G_j + K_j$$

  Esto implica que obtenemos distintas estimaciones para los mismos parámetros estructurales.

# MCI como Estimador de Variables Instrumentales.

Sea la ecuación que queremos estimar

$$\underbrace{\mathbf{y}_j}_{Tx1} = \underbrace{Z_j}_{Tx(G_j+K_j)} \underbrace{\delta_j}_{(G_j+K_j)x1} + \underbrace{\mathbf{u}_j}_{Tx1} \qquad \mathbf{u}_j \sim (\mathbf{0}, \sigma_j^2 I_T)$$

donde $Z_j = \begin{bmatrix} \underbrace{Y_j}_{TxG_j} & \underbrace{X_j}_{TxK_j} \end{bmatrix} \quad \delta_j = \begin{bmatrix} \beta_j \\ \gamma_j \end{bmatrix}$.

La matriz de instrumentos a utilizar es $X = (X_j \vdots X_j^*)$ ya que las variables exógenas están incorreladas con $\mathbf{u}_j$ y, están correladas con las variables endógenas. Son buenos instrumentos.

Si está exactamente identificada $K_j^* = G_j$ por lo que la matriz $(X'Z_j)$ es una matriz cuadrada, ya que $K = G_j + K_j$, y podemos obtener el estimador de Variables Instrumentales de $\delta_j$ como

$$\hat{\delta}_j^{VI} = (X'Z_j)^{-1} X' \mathbf{y}_j$$

Este estimador es la solución al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (X_j' Y_j)\, \hat{\beta}_j^{VI} &+ (X_j' X_j)\, \hat{\gamma}_j^{VI} &= X_j' \mathbf{y}_j \\ (X_j^{*\prime} Y_j)\, \hat{\beta}_j^{VI} &+ (X_j^{*\prime} X_j)\, \hat{\gamma}_j^{VI} &= X_j^{*\prime} \mathbf{y}_j \end{aligned}$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones del que es solución el estimador $\hat{\beta}_j^{MCI}$ y $\hat{\gamma}_j^{MCI}$.