El problema de la identificación en Modelos de Ecuaciones Simultáneas

OCW 2013 Marta Regúlez Castillo

Economía Aplicada III (UPV/EHU)

OCW 2013

Contents

Forma Estructural

La Forma Estructural recoge las relaciones entre todas las variables sean endógenas o exógenas. Las variables endógenas se determinan conjuntamente dentro del sistema dadas las variables exógenas.

Forma Estructural (F.E.):

$$B\mathbf{y}_t + \Gamma \mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

- B: matriz $(G \times G)$ parámetros que acompañan a las variables endógenas.
- Γ: matriz $(G \times K)$ parámetros que acompañan a las variables exógenas.
- $\mathbf{y}_t$: vector $(G \times 1)$ de variables endógenas en t.
- $\mathbf{x}_t$: vector $(K \times 1)$ de variables exógenas en t.
- $\mathbf{u}_t$: vector $(G \times 1)$ de perturbaciones de la F.E. en t.

Forma Estructural

Podemos escribir la ecuación i-ésima de la F.E. en t como:

$$\beta_{i1} y_{1t} + \beta_{i2} y_{2t} + \cdots + \beta_{iG} y_{Gt} + \gamma_{i1} x_{1t} + \gamma_{i2} x_{2t} + \cdots + \gamma_{iK} x_{Kt} = u_{it}$$

$i = 1, \ldots, G \quad t = 1, \ldots, T$

Suponemos que:

1) $|B| \neq 0$, el sistema es completo, no hay ecuaciones estructurales que son combinación unas de otras.
2) $\mathbf{u}_t \sim NID(0, \Sigma)$ donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2G} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_G^2 \end{bmatrix}$$

3) Las variables exógenas $\mathbf{x}_t$ son independientes de los términos de perturbación u_{it}

Forma Reducida

La Forma Reducida del modelo se obtiene de resolver en la F.E. las variables endógenas solamente en función de las variables exógenas. **Forma Reducida (F.R.)**

$$\mathbf{y}_t = \Pi \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

donde

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1K} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \pi_{G1} & \pi_{G2} & \cdots & \pi_{GK} \end{bmatrix} = -B^{-1}\Gamma \qquad \mathbf{v}_t = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ \vdots \\ v_{Gt} \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{u}_t$$

siendo $\mathbf{v}_t \sim NID(0, \Omega)$ donde $\Omega = B^{-1}\Sigma(B^{-1})'$.

Forma Reducida

Podemos escribir la ecuación i-ésima de la F.R. en el momento t como:

$$y_{it} = \pi_{i1}x_{1t} + \pi_{i2}x_{2t} + \pi_{i3}x_{3t} \cdots + \pi_{iK}x_{Kt} + v_{it}$$

$i = 1, \ldots, G \qquad t = 1, \ldots, T$

- La matriz Π contiene GK elementos.
- Las matrices B y Γ contienen como máximo $G^2 + GK$ elementos.

Por lo tanto si no hay restricciones sobre los parámetros en B y Γ existe una infinidad de valores de los parámetros estructurales en B y Γ llamadas estructuras, que corresponden a los mismos valores de los parámetros en la matriz Π de la F.R.

Estructuras observacionalmente equivalentes

- Estructura generadora de los datos observados $(B_0, \Gamma_0, \Sigma_0)$ $\longrightarrow$ Forma reducida asociada (Π_0, Ω_0)
- Esta estructura no está identificada si existen otras estructuras $(FB_0, F\Gamma_0, F\Sigma_0 F')$, donde F es cualquier matriz no singular $|F| \neq 0$, $F \neq I$ tal que:

$$\Pi^* = -(FB_0)^{-1}(F\Gamma_0) = -B_0^{-1}F^{-1}F\Gamma_0 = -B_0^{-1}\Gamma_0 = \Pi_0$$

$$\Omega^* = (FB_0)^{-1}(F\Sigma_0 F')((FB_0)^{-1})' = B_0^{-1}F^{-1}F\Sigma_0 F'(F')^{-1}(B_0^{-1})' =$$

$$= B_0^{-1}\Sigma_0 B_0^{-1} = \Omega_0$$

- Dan lugar a la misma Forma Reducida. Entonces:
- $(FB_0, F\Gamma_0, F\Sigma_0 F')$ y $(B_0, \Gamma_0, \Sigma_0)$ son observacionalmente equivalentes.

Estructuras observacionalmente equivalentes

- Si dos estructuras, valores concretos de los parámetros de la Forma Estructural, dan lugar a los mismos valores de los parámetros de la Forma Reducida, entonces se dice que son estructuras observacionalmente equivalentes.

  $$(B_0, \Gamma_0, \Sigma_0) \text{ y } (B_1, \Gamma_1, \Sigma_1) \longrightarrow \Pi_0 \text{ y } \Omega_0$$

  Estas dos estructuras son observacionalmente equivalentes.
- En este caso, entre $(B_0, \Gamma_0, \Sigma_0)$ y $(B_1, \Gamma_1, \Sigma_1)$ no podemos distinguir cuáles han sido los valores de los parámetros de la F.E. que han generado los datos observados. Se dice que estas estructuras no están identificadas.

Estructuras admisibles

Se llaman **estructuras admisibles del modelo** aquellas que satisfacen todas las restricciones que caracterizan el modelo. Se dice que F es una transformación lineal no singular admisible del modelo si la estructura $(FB, F\Gamma, F\Sigma F')$ es admisible del modelo, es decir satisface las restricciones impuestas sobre B, Γ y Σ

- ¿Cómo identificar un modelo?
- ¿Bajo qué condiciones no existirán estructuras observacionalmente equivalentes dada la especificación del modelo?

¿Cómo identificar?

Si no imponemos ninguna restricción tenemos $(G^2 + GK)$ parámetros estructurales desconocidos en B y Γ y $(\frac{G(G+1)}{2})$ en Σ, mientras que los parámetros que tenemos en la forma reducida son GK en Π y $(\frac{G(G+1)}{2})$ en Ω. Luego la diferencia nos da un exceso de

$$G^2 + GK + \frac{G(G+1)}{2} - GK - \frac{G(G+1)}{2} = G^2$$

Información que puede ayudar a identificar:

1) Normalizaciones: el coeficiente de una variable endógena en cada ecuación de la forma estructural sea la unidad.
2) Identidades: sus coeficientes son conocidos y aportan posibles restricciones de exclusión en otras ecuaciones.
3) Exclusión de variables en distintas ecuaciones de la F. E.
4) Restricciones lineales en F.E.
5) Restricciones en Σ

¿Cómo comprobar la identificación?

Podemos considerar dos formas de comprobar la identificación del modelo:

1) Ver si se pueden recuperar los parámetros estructurales de los parámetros de la forma reducida.
2) Demostrar que no existe ninguna otra estructura lineal que es admisible del modelo, es decir, que la única estructura que satisface todas las restricciones del modelo es $(FB, F\Gamma, F\Sigma F')$ donde $F = I$.

Esta última forma puede ser analíticamente farragosa en la práctica. En general se pueden utilizar las llamadas condiciones de orden y rango. Esto deja fuera comprobar identificación utilizando restricciones en la matriz Σ.

Notación de la ecuación j-ésima

Introducimos la siguiente notación para la ecuación j donde además de la variable dependiente y_j tenemos:

	Variables endógenas	**Variables exógenas**
Incluidas	Y_j con G_j variables	X_j con K_j variables
Excluidas	Y_j^* con G_j^* variables	X_j^* con K_j^* variables

Número de variables endógenas en el modelo: $G_j + G_j^* + 1 = G$
Número de variables exógenas total en el modelo : $K_j + K_j^* = K$

Sistema que relaciona F.E con F.R.

Dada esta notación, podemos escribir la ecuación j-ésima como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta_j' & -\beta_j^{*'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ Y_j \\ Y_j^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\gamma_j' & -\gamma_j^{*'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ X_j^* \end{bmatrix} = \mathbf{u}_j$$

esto es,

$$y_j = \beta_j' Y_j + \beta_j^{*'} Y_j^* + \gamma_j' X_j + \gamma_j^{*'} X_j^* + \mathbf{u}_j$$

Las exclusiones implican que $\beta_j^* = 0$ y $\gamma_j^* = 0$. Por lo tanto

$$B_j' = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_j' & \mathbf{0}' \end{bmatrix} \text{ y } \Gamma_j' = \begin{bmatrix} -\gamma_j' & \mathbf{0}' \end{bmatrix}$$

Sistema que relaciona F.E con F.R.

La matriz de coeficientes de la forma reducida es:

$$\Pi = -B^{-1}\Gamma \quad \Rightarrow B\Pi = -\Gamma$$

Para la ecuación j-ésima de este sistema: $B_j'\Pi = -\Gamma_j'$ esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & \underbrace{-\beta_j'}_{(1\times G_j)} & \underbrace{\mathbf{0}'}_{1\times G_j^*)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underbrace{\pi_j'}_{(1\times K_j)} & \underbrace{\pi_j*'}_{(1\times K_j^*)} \\ \underbrace{\Pi_{1j}}_{(G_j\times K_j)} & \underbrace{\Pi_{1j}^*}_{(G_j\times K_j^*)} \\ \underbrace{\Pi_{2j}}_{(G_j^*\times K_j)} & \underbrace{\Pi_{2j}^*}_{(G_j^*\times K_j^*)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\gamma_j'}_{(1\times K_j)} & \underbrace{\mathbf{0}'}_{(1\times K_j^*)} \end{bmatrix}$$

Sistema que relaciona F.E con F.R.

De este sistema extraemos las siguientes K ecuaciones:

$$\pi_j - \Pi'_{1j}\beta_j = \gamma_j \qquad K_j \quad \texttt{ecuaciones} \tag{1}$$

$$\pi_j^* - \Pi^{*'}_{1j}\beta_j = \mathbf{0} \qquad K_j^* \quad \texttt{ecuaciones} \tag{2}$$

De (2) $\Longrightarrow \Pi^{*'}_{1j}\beta_j = \pi_j^*$

• Una vez se soluciona de forma única para β_j se puede obtener de (1) la solución para γ_j.
• Por lo tanto podemos establecer las condiciones necesarias y suficientes para que (2) tenga una única solución.

Condición de Orden

- La **condición necesaria pero no suficiente** para que

$$\Pi_{1j}^{*'}\beta_j = \pi_j^*$$

tenga solución es que **deberá de haber al menos tantas ecuaciones como incógnitas**.
Esto implica la siguiente condición necesaria para la identificación de la j-ésima ecuación:
- El número de variables exógenas excluidas de la ecuación j-ésima deberá de ser al menos igual o mayor que el número de variables endógenas incluidas en la ecuación j-ésima.

Condición de orden: $K_j^* \geq G_j$
Equivalentemente: $K_j^* + K_j \geq G_j + K_j \longleftrightarrow K \geq G - 1$

Condición de Rango en términos de la F.R.

La condición de orden es necesaria pero no es suficiente para la identificación de la ecuación j-ésima, ya que establece la condición para que (2) tenga al menos una solución pero no asegura que sea única.
La **condición necesaria y suficiente** para que esta solución a (2) exista y sea única es la siguiente:

Condición de Rango: $rango(\Pi_{1j}^{*'}) = G_j$

Si la ecuación j-ésima satisface esta condición, entonces es seguro que existe una única solución para los parámetros estructurales de esa ecuación a partir de los parámetros de la forma reducida. La ecuación j-ésima estaría identificada.
Problema: En la práctica la matriz $\Pi_{1j}^{*'}$ depende de parámetros desconocidos que hay que estimar.

Condición de Rango en términos de la F.E.

- Una aproximación alternativa al problema de la identificación es analizar las condiciones de orden y rango pero desde las restricciones a priori sobre B y Γ.
- Estas restricciones eliminan otras estructuras observacionalmente equivalentes porque ya no serán admisibles al modelo.
- Hay que estudiar si son necesarias y/o suficientes para identificar la ecuación.
- Sea la matriz A de parámetros estructurales $(G \times (G+K))$ que representa una estructura

$$A = \begin{bmatrix} B & \Gamma \end{bmatrix}$$

Condiciones de orden y rango en términos de la F.E.

Sea $\mathbf{i}_j'$ un vector fila que tiene un 1 en la j-ésima posición y ceros el resto de elementos. Los coeficientes de la ecuación j-ésima se pueden escribir en un vector fila $\mathbf{a}_j'$ tal que:

$$\mathbf{a}_j' = \mathbf{i}_j' A = \left[\begin{array}{cc} B_j' & \Gamma_j' \end{array} \right]$$

Las restricciones de exclusión de la ecuación j-ésima, $\beta_j^* = \mathbf{0}$ y $\gamma_j^* = \mathbf{0}$, se pueden expresar como

$$\underbrace{\mathbf{a}_j'}_{1\times(G+K)} \underbrace{\Phi_j}_{(G+K)\times R} = \underbrace{\mathbf{0'}}_{1\times R}$$

donde $R = G_j^* + K_j^*$ y Φ_j es una matriz de constantes con unos y ceros que selecciona de $\mathbf{a}_j'$ solamente β_j^* y γ_j^*.

Condición de rango en términos de la F.E.

La condición necesaria y suficiente para la identificación de la j-ésima ecuación estructural en términos de los parámetros estructurales es:

$$\textbf{Condición de Rango}: \quad \textbf{rango}(A\Phi_j) = G - 1$$

Dependiendo de si se satisface esta condición o no la ecuación estará identificada o no identificada. La condición de orden sigue siendo

Condición de orden: $K_j^* \geq G_j$ **Equivalentemente:**

$$K_j^* + K_j \geq G_j + K_j \longleftrightarrow K \geq G - 1$$

Exacta identificación y sobreidentificación

- **No está identificada**, si bien no se satisface la condición de orden, esto es se tiene que

$$K_j^* < G_j \Leftrightarrow G_j^* + K_j^* < G - 1$$

o bien se satisface la condición de orden pero no se satisface la de rango, esto es

$$K_j^* \geq G_j \quad \texttt{pero} \quad rango(A\Phi_j) < G - 1$$

- **Exactamente identificada**, si se satisface la condición de rango y la condición de orden con igualdad, esto es

$$K_j^* = G_j \Leftrightarrow G_j^* + K_j^* = G - 1 \quad \texttt{y} \quad rango(A\Phi_j) = G - 1$$

- **Sobreidentificada**, si se satisface la condición de rango y la condición de orden con exceso, esto es

$$K_j^* > G_j \Leftrightarrow G_j^* + K_j^* > G - 1 \quad \texttt{y} \quad rango(A\Phi_j) = G - 1$$