6. Algebra de boole

Es el algebra que se utiliza para operar con las variables lógicas. Las propiedades, reglas y teoremas básicos se presentan en los siguientes apartados:

6.1. Propiedades

Conmutativa:	A + B = B + A	A.B = B.A
Asociativa:	A + (B + C) = (A + B) + C	A.(B.C) = (A.B).C
Distributiva:	A.(B + C) = A.B + A.C	A + (B.C) = (A+B). (A+C)

6.2. Reglas

A + 0 = A	A. A = A
A + 1 = 1	A. $\overline{A}$ = 0
A . 0 = 0	$\overline{\overline{A}}$ = A
A . 1 = A	A + AB = A; A (1 + B) = A
A + A = A	A + $\overline{A}$B = A + B
A + $\overline{A}$ = 1	(A + B) (A + C) = A + BC

6.3. Teoremas

Teorema de Demorgan

$$\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$\overline{X + Y} = \overline{X}.\overline{Y}$$

Teorema de Shanon

$$F = A + B \Rightarrow \overline{F} = \overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$$

6.4. Aplicación al diseño de Sistemas Electrónicos

El álgebra de Boole permite manipular las expresiones lógicas con el objetivo de obtener una expresión simplificada y por lo tanto más sencilla. Supongamos la siguiente expresión:

$$F = \overline{C}\,\overline{B}A + \overline{C}BA + C\overline{B}A + CBA = \sum(1,3,5,7)$$

El circuito correspondiente sería el de la Figura 23

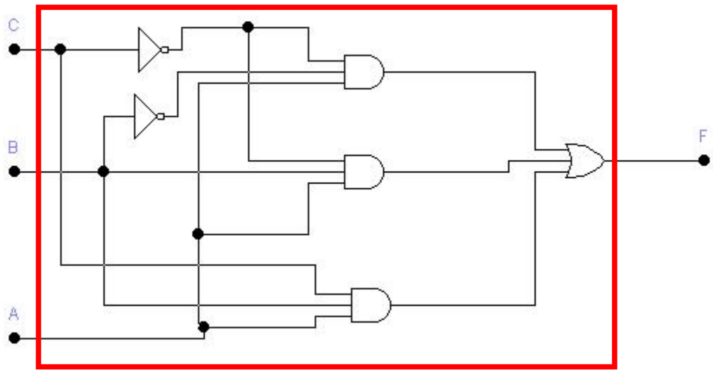

Figura 23

Si aplicamos las propiedades y reglas del álgebra de Boole, la expresión puede simplificarse de la siguiente manera:

$$F(CBA) = \overline{C}\,\overline{B}A + \overline{C}BA + C\overline{B}A + CBA$$

$$F(CBA) = \overline{C}A\left(\overline{B} + B\right) + CA\left(\overline{B} + B\right)$$

$$F(CBA) = \overline{C}A + CA = A\left(\overline{C} + C\right) = A$$

$$F(CBA) = A$$

y, por lo tanto, el circuito correspondiente sería el representado en la Figura 24

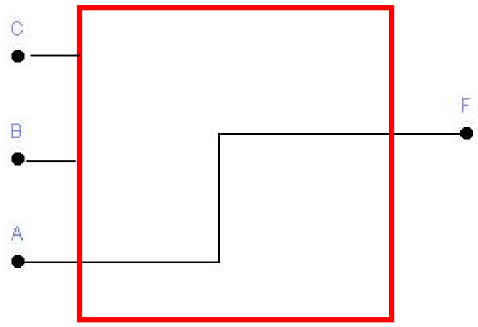

Figura 24

El circuito de ambas figuras (Figura 24 y Figura 23) realizan la misma función. Sin embargo, el correspondiente a la Figura 24 requiere menos circuitería y por lo tanto será más económico.

Así pues, toda función canónica obtenida a partir de una Tabla de Verdad o de una descripción verbal debe simplificarse aplicando las propiedades del algebra de Boole previo a su implementación mediante puertas lógicas.

El esquema definitivo que representa el procdiemnto d ediseño, se ilustra en la Figura 25

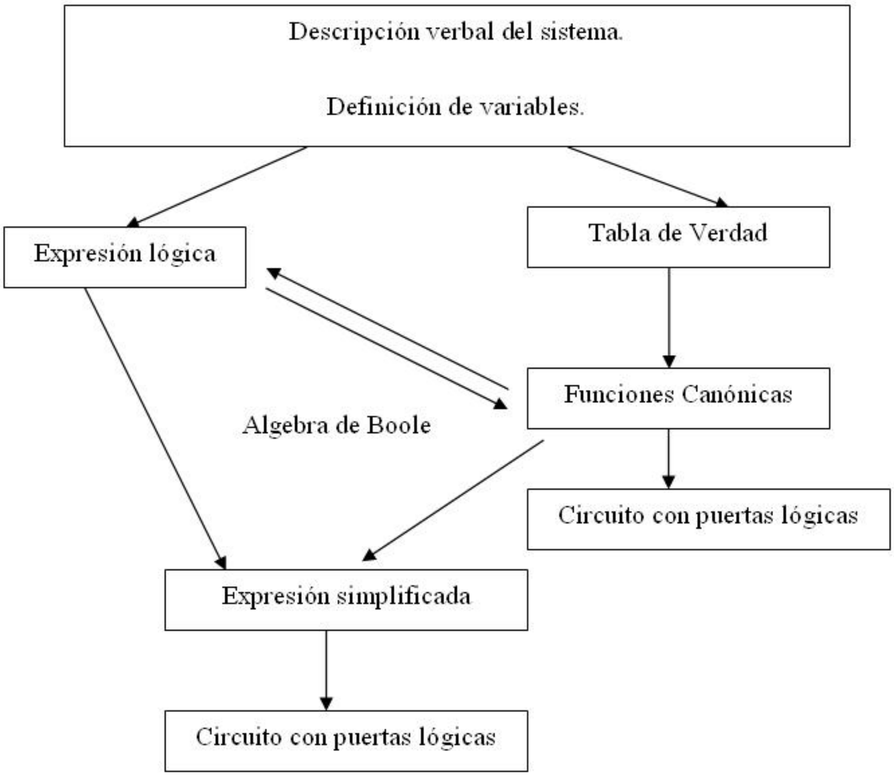

Figura 25

Veamos algún ejemplo de aplicación:

1) Simplificación de funciones:

$$F(ABCD) = \sum(0,1,2,3,13,15)$$

$$F(ABCD) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}CD + AB\overline{C}D + ABCD$$

$$F(ABCD) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\left(\overline{D} + D\right) + \overline{A}\,\overline{B}C\left(\overline{D} + D\right) + ABD\left(\overline{C} + C\right)$$

$$F(ABCD) = \overline{A}\,\overline{B}\left(\overline{C} + C\right) + ABD = \overline{A}\,\overline{B} + ABD$$

$$F(ABC) = \sum(2,3,4,5)$$

$$F(ABC) = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$F(ABC) = \overline{A}B\left(\overline{C} + C\right) + A\overline{B}\left(\overline{C} + C\right)$$

$$F(ABC) = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$$

$$F(ABC) = \overline{AB + AC} + \overline{A}\,\overline{B}C$$
$$F(ABC) = \overline{AB}.\overline{AC} + \overline{A}\,\overline{B}C$$
$$F(ABC) = \left(\overline{A} + \overline{B}\right).\left(\overline{A} + \overline{C}\right) + \overline{A}\,\overline{B}C$$
$$F(ABC) = \overline{A}.\overline{A} + \overline{A}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$
$$F(ABC) = \overline{A} + \overline{A}.\overline{C} + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$$
$$F(ABC) = \overline{A} + \overline{B}.\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{B}.\overline{C}$$
$$F(ABC) = \overline{A} + \overline{B}.\overline{A} + \overline{B}.\overline{C}$$
$$F(ABC) = \overline{A} + \overline{B}.\overline{C}$$

$$F(ABC) = \sum(3,6,7)$$
$$F(ABC) = \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$$
$$F(ABC) = \overline{A}BC + AB\left(\overline{C} + C\right)$$
$$F(ABC) = \overline{A}BC + AB = B\left(\overline{A}C + A\right) = B(C + A)$$

2) Obtener la función canónica a partir de las siguientes expresiones simplificadas

$$F(ABC) = A + A\overline{B} + B\overline{C}$$
$$*A = A.1 = A\left(B + \overline{B}\right) = AB + A\overline{B}$$
$$AB = AB\left(C + \overline{C}\right) = ABC + AB\overline{C}$$
$$A\overline{B} = A\overline{B}\left(C + \overline{C}\right) = A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$$
$$*A\overline{B} = A\overline{B}.1 = A\overline{B}\left(C + \overline{C}\right) = A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$$
$$*B\overline{C} = B\overline{C}.1 = \left(A + \overline{A}\right)B\overline{C} = AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$
$$F(ABC) = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$
$$F(ABC) = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$
$$F(ABC) = m_7 + m_6 + m_5 + m_4 + m_2$$
$$F(ABC) = \sum(2,4,5,6,7)$$

$$F(ABC) = (A+B).\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$$
$$F(ABC) = (A+B+0).\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$$
$$F(ABC) = \left(A+B+C.\overline{C}\right).\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$$
$$F(ABC) = (A+B+C).\left(A+B+\overline{C}\right).\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$$
$$F(ABC) = M_0.M_1.M_3$$
$$F(ABC) = \prod(0,1,3)$$