Cuestiones.

C1. De un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ se sabe:
(a) $(1,1,1)$ es un vector propio de f.
(b) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ es un subespacio fundamental de f.
¿Podemos afirmar que f es diagonalizable? ¿Por qué? ¿Cómo es su polinomio característico?(1.25 pto.)
Solución. Observamos que $(1,1,1) \notin T$ y que $\dim(T) = 2$, luego es posible formar una base de $\mathbb{R}^3$ que lleve vectores propios, así que f es diagonalizable. Su polinomio característico será de la forma $(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $V(\lambda_1) = T$ y $V(\lambda_2) =< (1,1,1) >$.

C2. Sea $f : V \to V$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Demostrar que si $v_1 \in V - \{0_V\}$ es un vector isótropo tal que $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, entonces $\mathfrak{B}_V$ no es una base ortogonal respecto de f. (1.25 pto.)
Solución. Si es una forma bilineal simétrica no degenerada, al calcular la matriz asociada respecto de una base ortogonal ésta debe ser de rango n. Pero al ser la base orotogonal, la matriz asociada es diagonal, luego para que sea de rango n, deben ser los elementos de la diagonal principal no nulos, estos es, los vectoress de la base ortogonal que estamos usando son todos no isótropos. Por tanto, $\mathfrak{B}_V$ no es base ortogonal al ser v_1 isótropo.

C3. Se considera el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ con base ortonormal $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,-1),(1,1,0)\}$. Del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, se sabe que la matriz asociada a f en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Estudiar si f es isometría y/o endomorfismo autoadjunto para el producto escalar definido. (1.5 pto.)
Solución. Para estudiar si es autoadjunto y/o isometría, hallamos la matriz asociada a f respecto de la base ortonormal $\mathfrak{B}$. Para calcularla empleamos la relación existente entre matricesa asociadas a la misma aplicación lineal:

$$B = M_{\mathfrak{B}_c,\mathfrak{B}} A M_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}_c} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Como B no es ni simétrica ni ortogonal, se sigue que f no es autoadjunto ni isometría.

Problemas.

P1. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la familia de matrices

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & a \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinar la forma canónica de Jordan J de $M_{a,b}$, según los valores de a y b. (1.5 ptos.)
(ii) Si $M_{1,-1}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ respecto de la base $\mathfrak{B} = \{1+x, 1-x, x^2-x\}$, hallar, si es que existe, una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada a f sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. (0.75 pto.)

Solución.

(i) El polinomio característico de $M_{a,b}$ es $(x-3)(x+2)^2$. Además,

$$\begin{aligned} V_{M_{a,b}}(-2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | M_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 5x = 0,\ x + az = 0,\ bx = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, el sistema

$$\begin{cases} 5x = 0, \\ x + az = 0, \\ bx = 0 \end{cases}$$

tiene por solución a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{si } a \neq 0$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{si } a = 0$$

Por tanto la forma canónica de Jordan J de $M_{a,b}$ es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{si } a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{si } a = 0,\ b \in \mathbb{R}$$

(ii) para hallar la base pedida trabajamos con la matriz $M_{a,b}$ y luego interpretamos los resultados obtenidos. Vamos a calcular P inversible que sea matriz de paso:

$$\begin{aligned} E_{2,M_{1,-1}}(-2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | (M_{1,-1} + 2I_3)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} | y, z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Tomamos un vector que esté en $E_{2,M_{1,-1}}(-2)$ pero no pertenezca a $V_{M_{1,-1}}(-2)$, por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y calculamos $(M_{1,-1} + 2I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ahora localizamos un vector propio para $\lambda = 3$:

$$\begin{aligned} V_{M_{1,-1}}(3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | M_{1,-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} (25/4)y \\ y \\ -(5/4)y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$P^{-1} M_{1,-1} P = J_{M_{1,-1}}$$

y sabemos que P lleva en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base respecto a la cual está calculada $J_{M_{1,-1}}$ en la base $\mathfrak{B}$. Por tanto, la base pedida es $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, v_2, v - 3\}$, siendo

$$v_1 = 25(1+x) + 4(1-x) - 5(x^2 - x) = 29 + 26x - 5x^2, \; v_2 = 1 - x, \; v_3 = 1 - 2x + x^2.$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(1,1,1), (-1,0,0), (1,2,3)\}$ es

$$M_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que f es no degenerada. ¿Es definida positiva? (0.5 ptos.)
(ii) Hallar una base $\mathfrak{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto de f. Deducir la signatura de f. (1 pto.)
(iii) Calcular una matriz de paso entre $M_{\mathfrak{B}}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}'}(f)$. (0.75 ptos.)

Solución.

(i) Aplicando el Teorema 4.1 del Tema 4, sabemos que f es no degenerada si ys sólo si cualquier matriz asociada a f es inversible. Ahora, $\det(M_{\mathfrak{B}}(f)) = -1$, que es no nulo, luego $M_{\mathfrak{B}}(f)$ es inversible y f es no degenerada. No es definida positiva porque no cumple el criterio de Sylvester. Por ejemplo, el vector $v = (-5, -7, -10)$, que tiene por coordenadas a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en la base $\mathfrak{B}$ verifica que $f(v, v) = -3 < 0$.

(ii) Consideramos el vector $v_1 = w_1 = (1,1,1)$ que es no isótropo. Localizamos $< (1,1,1) >^{\perp}$:

$$\begin{aligned} < (1,1,1) >^{\perp} &= \{\textstyle\sum_{i=1}^3 a_i v_i | (a_1 \; a_2 \; a_3) M_{\mathfrak{B}}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{\textstyle\sum_{i=1}^3 a_i v_i | a_3 = a_1 + \frac{2}{3} a_2\} \end{aligned}$$

entonces el vector $w_2 = (2,3,4)$ es no isótropo (ya que $f(w_2, w_2) = (1 \; 0 \; 1) M_{\mathfrak{B}}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$) y ortogonal a w_1. Sólo falta calcular w_3:

$$\begin{aligned} < (1,1,1), (2,3,4) >^{\perp} &= \{\textstyle\sum_{i=1}^3 a_i v_i | (a_1 \; a_2 \; a_3) M_{\mathfrak{B}}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (a_1 \; a_2 \; a_3) M_{\mathfrak{B}}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \{\textstyle\sum_{i=1}^3 a_i v_i | a_2 = -6a_1, \; a_3 = -3a_1\} \end{aligned}$$

Entonces el vector $w_3 = (1,1,1) - 6(-1,0,0) - 3(1,2,3) = (4,-5,-8)$ es ortogonal a $\{(1,1,1), (2,3,4)\}$ y $f(w_3, w_3) = 6$. En definitiva, la base buscada $\mathfrak{B}'$ es $\{(1,1,1), (2,3,4), (4,-5,-8)\}$. Para calcular la signatura, basta con determinar los valores de la diagonal principal de una matriz diagonal congruente con $M_{\mathfrak{B}}(f)$. Si calculamos la matriz asociada a f respecto de $\mathfrak{B}'$, la matriz obteneida es diagonal (por ser $\mathfrak{B}'$ ortogonal) y lleva en la diagonal principal $f(w_i, w_i)$, para $i = 1, 2, 3$. Ahora,

$$f(w_1, w_1) = 3,\ f(w_2, w_2) = -2,\ f(w_3, w_3) = 6.$$

Por tanto, la signatura de f es $(2, 1)$.

(iii) Por la relación existente entre las matrices asociadas a la misma forma bilineal una matriz de paso P es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}'$ a $\mathfrak{B}$, o sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.