Cuestiones

C1. (**1 pto.**) Descomponer en factores irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ el polinomio $f(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + 2x^2 + 2x - 4$.
Solución. La descomposición en factores irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ es: $(x-1)(x+2)(x^4+2)$

C2. (**1 pto.**) Hallar un subespacio f-invariante no trivial siendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación cuya matriz asociada en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución. Un subespacio f-invariante no trivial es cualquier subespacio fundamental asociado a un valor propio. Así si calculamos el polinomio característico de f se tiene

$$\chi_f(x) = (x-1)(x-2)^2$$

y $V(1)$ o $V(2)$ es subespacio f-invariante no trivial.

C3. (**1.5 pto.**) Determinar la matriz asociada respecto de la base canónica de la forma bilineal $f : R^3 \to \mathbb{R}^3$ sabiendo que

$$f((2,0,0),(2,0,0)) = 0 \qquad f((2,0,0),(0,2,1)) = -4 \qquad f((2,0,0),(1,1,1)) = -1$$

$$f((0,2,1),(0,2,1)) = 1 \qquad f((0,2,1)),(1,1,1)) = f((1,1,1)),(1,1,1)) = -1$$

y calcular su signatura.
Solución. La matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(2,0,0),(0,2,1),(1,1,1)\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4, & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} :$$

Empleando la relación que existe entre matricesa asociadas a la misma forma bilineal deducimos que la matriz pedida es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Su signatura es (2,1).

Problemas

P1. (**2.5 ptos.**) Se considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Hallar su forma canónica de Jordan J.

(ii) ¿Son las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ asociadas a f? Razona tu respuesta. **Solución.**

(i) La forma canónica de Jordan pedida es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) La matriz B s´i es matriz asociada a f. De hecho, es su forma canónica de Jordan. La matriz C no es matriz asociada a f porque es diagonalizable y f no lo es.

P2. (**2.5 ptos.**) Se considera el espacio $\mathbb{R}^3$ en el que se ha definido un producto escalar $(\ ,\ )$ de forma que la base $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es ortonormal respecto de $(\ ,\ )$. Se define en $\mathbb{R}^3$ el endomorfismo $f((a,b,c)) = (7a-8b+6c, 3a-7b+9c, 5c)$.

(i) Estudiar si f es una isometría y/o endomorfismo autoadjunto de $(\mathbb{R}^3, (\ ,\ ))$.

(ii) Hallar, si es posible, una base ortonormal respecto de $(\ ,\ )$ de $\mathbb{R}^3$ que esté formada por vectores propios de f.

(iii) ¿Existe una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$? ¿Por qué?

Solución.

(i) Si calculamos A matriz asociada a f respecto de la base ortonormal $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$, sabemos que f es isometría si y sólo si A es ortogonal y f es autoadjunta si y sólo si A es simétrica. Ahora,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

que es simétrica pero no ortogonal, luego f es un endomorfismo autoadjunto que no es isometría para el porducto escalar dado.

(ii) Basta con ortonormalizar con el producto escalar dado una base formada por vectores propios $\mathfrak{B}_1$, como por ejemplo $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,-1),(-4,-2/3,2/3),(3,3,-2)\}$.

(iii) No, poruqe el endomorfismo f es diagonalizable y la matriz B nno lo es