Cuestiones.

C1. Sea $p(x) = x^6 + 51x^4 - 15x^5 + 18x^3 + 162x^2 + 96x + 128$.

(i) Localizar las raíces racionales con multiplicidad mayor que 1 de $p(x)$. (0.5 ptos.)

(ii) Dar su descomposición en producto de polinomios irreducibles sobre $\mathbb{Q}$. (0.5 ptos.)

Solución.

(i) La raíz racional con multiplicidad mayor que 1 es 8.

(ii) La descomposición en polinomios irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ es: $(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(x - 8)^2$.

C2. Demostrar que si $A, B \in \mathrm{Mat_{n\times n}}(\mathbb{R})$ son matrices simétricas reales, entonces A y B son semejantes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico. (1.25 pto.)

Solución. $\Rightarrow$ Si A y B son semejentes, entonces $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

$\Leftarrow$ Si A y B son matrices simétricas reales, sabemos que A y B son diagonalizables. Pero como $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, ambas son semejantes a la misma forma diagonal D, luego entre ellas son semejantes.

C3. Demostrar, si es cierta, la siguiente afirmación o dar un contraejemplo: Si $f : V \times V \to R$ es una forma bilineal simétrica no degenerada y su signatura es (r, s), entonces $r + s = n$, siendo $n = \dim(V)$. (1.25 pto.)

Solución. La afirmación es cierta. En efecto, si f es una forma bilineal simétrica no degenerada y A es una matriz asociada a f respecto de una base $\mathfrak{B}_V$, entonces $\mathrm{rg}(A) = n$ por ser no dgenerada. Adems, la signatura de A (r, s) es la de una matriz diagonal D que sea congruente a A, y $n = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(D) = r + s$.

Problemas.

P1. Se considera la familia de matrices

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a-1 & -a+1 \\ a-b & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que $M_{a,b}$ es triangularizable para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y determinar la forma canónica de Jordan $J_{a,b}$ de $M_{a,b}$, según los valores de a y b. (0.75 ptos.)

(ii) Hallar una matriz inversible $P_{a,b}$ tal que $J_{a,b} = P_{a,b} M_{a,b} P_{a,b}^{-1}$. (1 pto.)

(iii) Se considera el endomorfismo $f : \mathbb{P}_3(R) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B} = \{1 + x, 1 - x, x - x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$ es $M_{1,0}$. Estudiar si la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es matriz asociada a f respecto de alguna base y, en caso de respuesta afirmativa, hallarla. (0.75 ptos.)

Solución.

(i) $M_{a,b}$ es triangularizable porque

$$\chi_{M_{a,b}} = (x + 1)^3(x - 1),$$

que se escinde sobre $\mathbb{R}$. Ahora,

$$\begin{aligned} V_{M_{a,b}}(-1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} | M_{a,b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} | (a-1)z + (-a+1)t = 0, (a-b)x + 4z - 2t = 0, 4z - 2t = 0 \right\} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} (a-1)z+(-a+1)t=0 \\ (a-b)x+4z-2t=0 \\ 4z-2t=0 \end{cases}$$
tiene la siguiente solución:

1. Si $a=b\neq 1$, entonces $z=t=0,\ x,y\in\mathbb{R}$.
2. Si $a=b=1$, entonces $z=2t,\ x,y\in\mathbb{R}$.
3. Si $a\neq b$ y $a=1$, entonces $z=2t,\ x=0,\ y\in\mathbb{R}$.
4. Si $a\neq b$ y $a\neq 1$, entonces $x=z=t=0,\ y\in\mathbb{R}$. Por tanto, las formas canónicas de Jordan son:

1. Si $a=b\neq 1$, entonces $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Si $a=b=1$, entonces $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Si $a\neq b$ y $a=1$, entonces $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Si $a\neq b$ y $a\neq 1$, entonces $J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Las matrices P se construyen buscando la sucesión de espacios fundamentalesa generalizados. Dependiendo del vector que se elija para iniciar el proceso se obtienen matrices diferentes. Por ejemplo, en el caso 2. una matriz P viene dada por
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) La forma canónica de f es
$$J_f=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
que coincide con la forma canónica de Jordan de A. Luego A síes matriz asociada a f. Además,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ 1/2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} M_{0,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ 1/2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A$$
y $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ 1/2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz que lleva las coordenadas de los vectores de la base $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}$, siendo $\mathfrak{B}_1$ la base respecto de la cual A es matriz asociada a f.

P2. Para $a \in \mathbb{R}$, se considera la familia de matrices simétricas

$$M_a = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y la familia de formas bilineales $f_a : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tales que M_a es la matriz asociada a f_a respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(-1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,\sqrt{2})\}$.

(i) Si $sg(M_a) = (r,s)$, demostrar que $r \geq 2$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (0.5 ptos.)
(ii) Determinar la signatura de M_a, según los diferentes valores de a. (0.75 ptos.)
(iii) Demostrar que f_{-3} es degenerada y calcular el núcleo de f_{-3}. (0.75 ptos.)
(iv) Demostrar que f_{-2} es un producto escalar de $\mathbb{R}^4$. (0.50 ptos.)

Solución.

(i) Los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son ambos no isotropos y orotgonales netre sí. Luego podemos construir una base ortogonal $\mathfrak{B}$ que tenga a ambos como los dos primeros vectores y por tanto en la matriz diagonal D que sea congruente con A y se calcule con respecto a la base ortogonal $\mathfrak{B}$ tendr'a al menos dos entradas no nulas, así que $sg(M_a) = (r,s)$ satisface que $r \geq 2$.

(ii) Construyend una base ortogonal y calculando la matriz diagonal congruente con M_a obtenemos que la signatura es:

1. Si $a < -3$, la signatura es $(3,1)$
2. Si $a = -3$, la signatura es $(3,0)$.
3. Si $-3 < a < \frac{3-3\sqrt{3}}{2}$, la signatura es $(4,0)$.
4. Si $a = \frac{3-3\sqrt{3}}{2}$, la signatura es $(3,0)$.
5. Si $\frac{3-3\sqrt{3}}{2} < a < -1$, la signatura es $(4,1)$.
6. Si $a = -1$, la signatura es $(3,1)$.
7. Si $-1 < a < \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$, la signatura es $(2,2)$.
8. Si $a = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$, la signatura es $(2,1)$.
9. Si $a > \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$, la signatura es $(3,1)$.

(iii) f_{-3} es no degenerada porque la signatura de M_{-3} es $(3,0)$. Si llamamos $v_1 = (-1,0,0,0)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (0,0,-1,0)$, $v_4 = (0,0,0,\sqrt{2})$, y $e_1 = (1\ 0\ 0\ 0)$, $e_2 = (0\ 1\ 0\ 0)$, $e_3 = (0\ 0\ 1\ 0)$, y $e_4 = (0\ 0\ 0\ 1)$, entonces

$$\begin{aligned} (R^4)^{\perp} &= \{\textstyle\sum_{i=1}^4 \alpha_i v_i | e_j M_{-3} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0, j = 1, \ldots, 4\} \\ &= \{\textstyle\sum_{i=1}^4 \alpha_i v_i | \alpha_1 = 3\alpha_4, \alpha_2 = -9\alpha_4, \alpha_3 = -2\alpha_4, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned} .$$

(iv) f_{-2} es no degenerada y definida posistiva por se su signatura $(4,0)$. Luego es un producto escalar.