Cuestiones.

C1. De un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ se sabe:

(a) $(1,1,1)$ es un vector propio de f.

(b) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$ es un subespacio fundamental de f.

¿Podemos afirmar que f es diagonalizable? ¿Por qué? ¿Cómo es su polinomio característico? (1.25 pto.)

C2. Sea $f : V \to V$ una forma bilineal simétrica no degenerada. Demostrar que si $v_1 \in V - \{0_V\}$ es un vector isótropo tal que $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V, entonces $\mathfrak{B}_V$ no es una base ortogonal respecto de f. (1.25 pto.)

C3. Se considera el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ con base ortonormal $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,-1),(1,1,0)\}$. Del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, se sabe que la matriz asociada a f en la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Estudiar si f es isometría y/o endomorfismo autoadjunto para el producto escalar definido. (1.5 pto.)

Problemas.

P1. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se considera la familia de matrices

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & a \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Determinar la forma canónica de Jordan J de $M_{a,b}$, según los valores de a y b. (1.5 ptos.)

(ii) Si $M_{1,-1}$ es la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ respecto de la base $\mathfrak{B} = \{1+x, 1-x, x^2-x\}$, hallar, si es que existe, una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada a f sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (0.75 pto.)

P2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(1,1,1), (-1,0,0), (1,2,3)\}$ es

$$M_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que f es no degenerada. ¿Es definida positiva? (0.5 ptos.)

(ii) Hallar una base B'_V de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto de f. Deducir la signatura de f. (1 pto.)

(iii) Calcular una matriz de paso entre $M_{\mathfrak{B}}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}'}(f)$. (0.75 ptos.)

Teoría.

T1. Raíces de un polinomio.(1.5 pto.)