Cuestiones.

C1. Sea $p(x) = x^6 + 51x^4 - 15x^5 + 18x^3 + 162x^2 + 96x + 128$.
(i) Localizar las raíces racionales con multiplicidad mayor que 1 de $p(x)$. (0.5 ptos.)
(ii) Dar su descomposición en producto de polinomios irreducibles sobre $\mathbb{Q}$. (0.5 ptos.)

C2. Demostrar que si $A, B \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ son matrices simétricas reales, entonces A y B son semejantes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico. (1.25 pto.)

C3. Demostrar, si es cierta, la siguiente afirmación o dar un contraejemplo: Si $f : V \times V \to R$ es una forma bilineal simétrica no degenerada y su signatura es (r, s), entonces $r + s = n$, siendo $n = \dim(V)$. (1.25 pto.)

Problemas.

P1. Se considera la familia de matrices

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a-1 & -a+1 \\ a-b & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que $M_{a,b}$ es triangularizable para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y determinar la forma canónica de Jordan $J_{a,b}$ de $M_{a,b}$, según los valores de a y b. (0.75 ptos.)
(ii) Hallar una matriz inversible $P_{a,b}$ tal que $J_{a,b} = P_{a,b} M_{a,b} P_{a,b}^{-1}$. (1 pto.)
(iii) Se considera el endomorfismo $f : \mathbb{P}_3(R) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B} = \{1+x, 1-x, x-x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ es $M_{1,0}$. Estudiar si la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es matriz asociada a f respecto de alguna base y, en caso de respuesta afirmativa, hallarla. (0.75 ptos.)

P2. Para $a \in \mathbb{R}$, se considera la familia de matrices simétricas

$$M_a = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y la familia de formas bilineales $f_a : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tales que M_a es la matriz asociada a f_a respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(-1,0,0,0), (1,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,\sqrt{2})\}$.
(i) Si $sg(M_a) = (r, s)$, demostrar que $r \geq 2$, $\forall a \in \mathbb{R}$. (0.5 ptos.)
(ii) Determinar la signatura de M_a, según los diferentes valores de a. (0.75 ptos.)
(iii) Demostrar que f_{-3} es degenerada y calcular el núcleo de f_{-3}. (0.75 ptos.)
(iv) Demostrar que f_{-2} es un producto escalar de $\mathbb{R}^4$. (0.50 ptos.)

Teoría.

T1. Polinomios irreducibles. Factorización de un polinomio como producto de irreducibles. (1.5 ptos.)