Problemas Propuestos del Tema 5: Espacios euclídeos.

Ejercicios

1.- Estudiar si las siguientes aplicaciones $f : V \times V \to \mathbb{R}$ son productos escalares en los espacios indicados:

(i) $V = \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$.

(ii) $V = \mathbb{R}^n$, $f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i$, siendo $1 \leq k < n$.

2.- Empleando el método de Gram-Schmidt encontrar una base ortonormal con respecto al producto escalar $(\ ,\ )$ en el espacio euclídeo E:

(i) $E =< (1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 1) >$, $((x_1, \ldots, x_4), (y_1, \ldots, y_4)) = \sum_{i=1}^{4} x_iy_i$.

(ii) $E = \{x, y, z, t) \mid x - y + z + t = x + y - z + t = 0\}$, $((x_1, \ldots, x_4), (y_1, \ldots, y_4)) = \sum_{i=1}^{4} x_iy_i$.

(iii) $E = \mathbb{R}^3$, $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$.

3.- Sea $(E, \cdot)$ un espacio euclídeo y $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$ su norma. Demostrar que $x \cdot y = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$.

4.- Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar estandar. Hallar, si es posible, todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen $f((1, 0, 0)) = (1/3, 2/3, -2/3)$, $f((0, 1, 0)) = (2/3, 1/3, 2/3)$.

5.- Estudiar si ls siguientes matrices simétricas son congruentes

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.- Comprobar que $||(x,y)|| = \sqrt{x^2 - 2xy + 2y^2}$ define una norma en $\mathbb{R}^2$ y localizar un producto escalar asociado a ella.

7.- Consideramos la forma bilineal simétrica f definida por $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Comprobar que f es producto escalar y localizar $\mathfrak{B}$ base ortonormal respecto de f.

Problemas

1.- Sea $(\ ,\ )$ un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$ tal que la base $\mathfrak{B} = \{(1,0,-1),(1,-1,-1),(0,1,1)\}$ es ortonormal.

(i) Determinar $((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$, para cualesquiera vectores de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Encontrar una base ortonormal que contenga un vector proporcional al $(1,1,1)$. Comprobar que la matriz de cambio de base entre ambas bases ortonormales es ortogonal.

2.- Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estandar. Definimos el homomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f((x,y,z)) = (\frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z, x, \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z)$.

(i) Empleando la definición, demostrar que f es una isometría.

(ii) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica y comprobar que es ortogonal.

(iii) Si tomamos el producto escalar $((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$, ’‘es f isometría?

3.- Consideramos la forma bilineal simétrica f definida por $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$.

(i) Comprobar que f es producto escalar y localizar $\mathfrak{B}$ base ortonormal respecto de f.

(ii) Demostrar que la aplicación $g((x,y,z)) = (y+z, -x+z, y)$ es una isometría de $\mathbb{R}^3$ respecto al producto escalar definido.

(iii) Hallar la matriz asociada a g respecto de la base $\mathfrak{B}$ calculada en (i).

(iv) ¿Es la matriz asociada a g respecto de la base canónica ortogonal? ¿contradice algun resultado teórico?

4.- Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar estandar y se define la aplicación $f((x,y,z)) = (5x+2y+2z, 2x+2y+z, 2x+y+2z)$.

(i) Demostrar que f es autoadjunta.

(ii) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f.

5.- En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar $(\ ,\ )$ respecto del cual la base $\mathfrak{B} = \{(-1,0,1), (1,-1,-1), (1,-1,0)\}$ es ortonormal y el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Hallar $((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$, para cualesquiera $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) ¿Es f una isometría del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, (\ ,\ ))$?.

(iii) ¿Es f un endomorfismo autoadjunto del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, (\ ,\ ))$?

(iv) ¿Existe una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, (\ ,\ ))$ formada por vectores propios de f? En caso de respuesta afirmativa, localizar una.

6.- Diagonalizar las siguientes matrices mediante una matriz de paso ortogonal: $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

7.- Se considera el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ con base ortonormal $\mathfrak{B}_V = \{(1,0,0),(0,1,-1),(1,1,0)\}$. Del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, se sabe que la matriz asociada a f en la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Estudiar si f es isometría y/o endomorfismo autoadjunto para el producto escalar definido.

8.- Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal cuya matrz asociada respecto de la base $\mathfrak{B} = \{(1/3,2/3,2/3,0), (2/3,-2/3,1/3,0), (2/3,1/3,-2/3,0), (0,0,0,-1)\}$ es

$$M_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 0 \\ -4 & 7 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(i) ¿Es f un endomorfismo autoadjunto respecto del producto escalar estandar?

(ii) Hallar, si es que existe, una base de $\mathbb{R}^4$ que sea ortonormal respecto al producto escalar estandar y que esté formada por vectores propios de f.

9.- Sea E un espacio euclídeo y f un endomorfismo autoadjunto. Demostrar que si $|\lambda| \leq 1$ para todo valor propio de f, entonces $||f(u)|| \leq ||u||$, para cada vector $u \in E$.

10.- Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo. Demostrar las desigualdades de Cauchy-Schwartz, Minkowski y la ley del coseno.