PROBLEMAS PROPUESTOS DEL TEMA 3:
FORMA CANÓNICA DE JORDAN DE UNA MATRIZ.

Ejercicios

1.- Examinar si las siguientes matrices son triangularizables sobre $\mathbb{R}$:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2.- Calcular la cadena de subespacios fundamentales generalizados para las siguientes matrices

(i) $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.- Escribir todos los posibles tipos de forma de Jordan para matrices de orden menor o igual que 4.

4.- Determinar todas las posibles formas canónicas de Jordan de una matriz A cuyo polinomio característico es:

(i) $\chi_A(x) = (x-2)^3(x-5)^2$, (ii) $\chi_A(x) = x(x+1)^4$, (iii) $\chi_A(x) = (x+2)^2(x-3)^2$.

5.- Encontrar la forma canónica de Jordan, una matriz de paso y A^n, con $n \in \mathbb{N}$, para:

(i) A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (ii) A=$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (iii) A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Problemas

1.- Hallar la forma canónica de Jordan de la matriz $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y una matriz de paso.

¿Para qué valores de a es diagonalizable?

2.- Estudiar si las matrices A y B son semejantes. En caso de que lo sean, localizar una matriz de paso:

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (iv) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3.- Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. ¿Por qué $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ forma un sistema ligado? Teniendo en cuenta lo anterior, demostrar que existe un polinomio no nulo que anula a A.