PROBLEMAS PROPUESTOS DEL TEMA 2:
FORMAS CANÓNICA DE JORDAN DE UN ENDOMORFISMO.

Ejercicios

1.- Encontrar, si es posible, una base respecto de la cual la matriz asociada a la aplicación lineal $f \in \text{End}\,(\mathbb{R}^3)$ sea una matriz de Jordan y determinar dicha matriz:

(i) $f(x,y,z) = (4x+2y-z, -2x+z, 2x+2y+z)$

(ii) f tiene a $M_{\mathfrak{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ como matriz asociada a f respecto de $\mathfrak{B}_c$ base canónica.

2.- Sea $f \in \text{End}(V)$, siendo V un K-espacio vectorial de dimensión n. Calcular la forma canónica de Jordan para f, sabiendo que $\chi_f(x) = (x-\lambda)^n$ y que

(i) $\dim(E_1(\lambda)) = 1$.

(ii) $\dim(E_1(\lambda)) = n-1$.

3.- Sea $V = \mathbb{C}^{10}$ y $f \in \text{End}\,(V)$ con un único valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$. Denotamos por $n_i = \dim(E_i(\lambda))$. Hallar la forma canónica de Jordan en los siguientes casos:

(i) $n_1 = 3, \quad n_2 = 5, \quad n_3 = 7, \quad n_4 = 9, \quad n_5 = 10.$

(ii) $n_1 = 3, \quad n_2 = 6, \quad n_3 = 9, \quad n_4 = 10.$

(iii) $n_1 = 2, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 6, \quad n_4 = 8, \quad n_5 = 9, \quad n_6 = 10.$

¿ Es posible que se den los valores $n_1 = 2, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 7, \quad n_4 = 9, \quad n_5 = 10$?

4.- Dado el endomorfismo $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x,y,z) = (4x+y-3z, -7x-2y+5z, 3x+y-2z)$ calcular $p(f)$ para los siguientes polinomios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$:

(i) $p(x) = x^2+x+1$; (ii) $p(x) = \chi_f(x)$; (iii) $p(x) = x^{21}+x^{20}+1$.

Problemas

1.- Consideremos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ definido por

$f(x,y,z,t) = (7x+3y+11z-2t, -2x-4y-5z-4t, -3x-4z+3t, 2x+3y+5z+3t).$

(i) Estudiar si f es triangularizable. En caso de respuesta afirmativa, hallar una base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $M_{\mathfrak{B}}(f)$ sea una matriz de Jordan.

(ii) Estudiar si las siguientes matrices pueden ser matrices asociadas a f respecto de alguna base y, en caso afirmativo, localizar una base respecto de la cual sean matrices asociadas:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.- Se considera $f_a \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, siendo $a \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a es f_a triangularizable?. Cuando lo sea, determinar su forma canónica de Jordan y una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual su matriz asociada sea una matriz de Jordan.

3.- Estudiar si las matrices A y B son semejantes. En caso de que lo sean, localizar una matriz de paso:

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (iv) $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4.- Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. ¿Por qué $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ forma un sistema ligado? Teniendo en cuenta lo anterior, demostrar que existe un polinomio no nulo que anula a A. ¿Qué sucede con el conjunto $\{1_V, f, f^2, \ldots, f^{n^2}\}$, si $f \in \mathrm{End}(V)$, siendo V un K-espacio vectorial sobre K de dimensión n?