Problemas propuestos del Tema 1:
Nociones básicas del Álgebra Lineal.

1.- Encontrar una base y la dimensión del subespacio vectorial

$$S = <(1,-2,-1,-3),(2,-1,0,2),(0,-1,2,-1),(3,-4,1,-2)> .$$

2.- Sea $C = \{(0,3,1),(-2,1,0),(1,1,-1),(1,1,1)\}$. Probar que C es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ y localizar un subconjunto de C que sea base de $\mathbb{R}^3$.

3.- Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4 con base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Se definen los vectores

$$v_1 = 2u_1 - u_2 + 2u_3 \qquad v_2 = 2u_1 - u_3 + 2u_4$$

$$v_3 = 2u_1 + u_2 - u_3 \qquad v_4 = -u_1 - 2u_3 + 3u_4$$

Probar que $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V y calcular lamatriz de cambio de coordenadas entre ambas bases.

4.- Sea $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 = -x_2, x_4 = 0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Hallar una base de U y localizar las coordenadas respecto a ella de $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$.

5.- Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aplicación lineal tal que $f((-1,-1)) = (1,-1,1)$ y $f((-3,1)) = (1,-2,1)$. Determinar, si es posible, $f((x,y))$ donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

6.- Hallar la matriz asociada a la aplicación lineal $f : V \to V$ respecto de $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ y sabiendo que

$$f(v_1 + 2v_2 - 3v_3) = v_1 - v_3 - v_2 \quad f(2v_1 + v_3) = 2v_2 - v_3 \quad f(3v_1 + v_2) = v_2 + 2v_3.$$

7.- Sean V y W dos espacios vectoriales ambos con dimensión finita n y $f : V \to W$ lineal. Demostrar que si f es suprayectiva, entonces f es biyectiva.

8.- Sea $W = <(0,1,0,0),(3,1,0,0)>$, y $f : W \to W$ la aplicación lineal definida por $f(x,y,z,t) = (x, -x-2y, -z-t, 2t)$.

(i) Demostrar que está bien definida.

(ii) Calcular la matriz B asociada a f respecto de $\mathfrak{B}_W = \{(3,0,0,0),(6,3,0,0)\}$ base de W.

9.- Se definen las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & (y+3t, y+t) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, y+2x, -y, 0) \end{array}.$$

Sean $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4} = \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0)\}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,-1),(1,1)\}$, bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Calcular $M_{\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}}(g \circ f)$. ¿Existe alguna relación entre esta matriz y $M_{\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}}(f)$ y $M_{\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^4}}(g)$?

10.- Calcular los valores propios reales λ y los subespacios fundamentales $V(\lambda)$ para $f \in$ End $(\mathbb{R}^3)$ definido por $f(x,y,z) = (-x-z, -7x+4y+13z, x-3z)$.

11.- Calcular los valores propios reales y los vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 5 & -8 \\ -4 & -2 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

12.- Sea $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Probar que $A \in GL_n(K)$ si y sólo si el cero no es valor propio de A.

Problemas

1.- Sea $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y+z=0\}$ y $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=0, y-z=0\}$. Demostrar que G y H son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (tomando en $\mathbb{R}^3$ la suma y la multiplicación por un escalar estandar) y que $\mathbb{R}^3 = G \oplus H$.

2.- Se consideran los subespacios vectoriales $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y-t=0, x+2z+t=0\}$, $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x-2y+6z+5t=0, x+t=0\}$

(i) Determinar $U+W$ y $U \cap W$.

(ii) Localizar $T \subseteq \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = T \oplus (U \cap W)$.

3.- Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((1,0,0)) = (0,-1,\text{sen}\alpha)$, $f((0,1,0)) = (1,0,\cos\alpha)$ y $f((0,0,1)) = (\text{sen}\alpha, \cos\alpha, 0)$.

(i) Calcular la matriz asociada a f tomando como base la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Sin realizar la composición, demostrar que $f^3((x,y,z)) = (0,0,0)$, para todo (x,y,z) elemento de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Localizar bases de $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$ y $\mathfrak{B}'_{\mathbb{R}^3}$, para que la matriz asociada a f sea de la forma $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Localizar matrices de paso P y Q tales que $A = PBQ$, siendo A la matriz asociada a f calculada en (i) y B la matriz asociada a f calculada en (iii).

4.- Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f((-1,1,3)) = (6,-4,16), \; f((-2,1,1)) = (-2,-5,1), \; f((3,2,-1)) = (1,14,-12).$$

(i) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Sin probar la inyectividad y/o suprayectividad de f directamente, ¿podemos deducir si f es un automorfismo?

5.- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f \in \text{End } V$ tal que $f^2 = 1_V$. Probar que los únicos valores propios posibles de f son 1 y -1.