Problemas Propuestos Anexo: Anillos de Polinomios

1.- (i) Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio mónico. Demostrar que todas sus raíces racionales son enteras, esto es, que si $a/b \in \mathbb{Q}$ es raíz de f, entonces a/b es un número entero.

(iii) Encontrar todas las raíces racionales de los siguientes polinomios: $x^n - 1$, $x^n + 1$, $3x^3 + x - 5$, $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

2.- Supongamos que $f \in \mathbb{R}[x]$ y $a \in \mathbb{C}$. Demostrar que $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$. Deducir que si a es una raíz de f, entonces $\overline{a}$ también es raíz de f. Deducir que todo polinomio de $\mathbb{R}[x]$ de grado impar tiene al menos una raíz real y que no existen polinomios irreducibles sobre $\mathbb{R}$ de grado mayor que 2.

3.- Calcular las raíces múltiples, indicando su multiplicidad, de los siguientes polinomios en el cuerpo K que se indica.

(i) $\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{11}{2}x + 3$, $K = \mathbb{Q}$;
(ii) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$, $K = \mathbb{Q}$;
(iii) $x^4 + \overline{5}x^3 + \overline{6}x^2 + \overline{9}x + \overline{5}$, $K = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$;
(iv) $x^5 + x^4 - x^3 - x + \overline{1}$, $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

4.- Estudiar si el polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible sobre los cuerpos que se indican: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5.- Demostrar que $x^4 + 4$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ y que es reducible sobre $\mathbb{Q}$.

6.-

(i) Encontrar todos los polinomios mónicos irreducibles sobre K de grado 2 y 3, siendo $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) Descomponer $p(x) = x^7 + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en producto de irreducibles sobre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

7.- Dar su descomposición en factores irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ de los siguientes polinomios:

(i) $p(x) = x^3 - 4x + 1$ (ii) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 7x + 5$

(iii) $p(x) = x^6 + 20x^4 + 15x^3 - 5$.

8.- Factorizar los siguientes polinomios como producto de irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$:

(i) $p(x) = x^3 - 1$ (ii) $p(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

9.- Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$.

(i) Demostrar que si $c \in \mathbb{Z}$ es una raíz de $p(x)$, entonces $c|a_0$, $(c_1)|p(1)$ y $(c+1)|p(-1)$

(ii) Empleando (i), calcular las raíces enteras de $p(x) = x^4 + x * 3 - x^2 + 40x - 100$.

10.- Sea K un cuerpo y $f(x) \in K[x]$.

(i) Demostrar que la relación definida por

$$\forall g(x), h(x) \in K[x], \qquad g(x) \sim h(x) \Longleftrightarrow f(x)|(g(x) - h(x))$$

es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente, que se denotará por $K[x]/(f(x))$.

(ii) Demostrar que $K[x]/(f(x))$ con las operaciones

$$\overline{g(x)} + \overline{h(x)} = \overline{g(x) + h(x)}$$
$$\overline{g(x)} \cdot \overline{h(x)} = \overline{g(x) \cdot h(x)}$$

es una anillo conmutativo unitario.

(iii) Demostrar que si $f(x)$ es irreducible sobre K, entonces $K[x]/(f(x))$ es un cuerpo.

(iv) Si $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y $f(x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]$ es un polinomio de grado n,¿cuántos elementos tiene $K[x]/(f(x))$?

(v) Dar ejemplos de cuerpos finitos con 4, 9 y 25 elementos.