Problemas propuestos del Tema 4: Formas bilineales.

Ejercicios

1.- Estudiar si las siguientes aplicaciones $f : V \times V \to K$ son formas bilineales:

(i) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1x_2$.

(ii) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + x_3y_3$.

Para los que se lo sean, determinar si son o no simétricas.

2.- Hallar la matriz asociada de la forma bilineal f respecto de la base $\mathfrak{B}_V$ indicada:

(i) $V = \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$ $\mathfrak{B}_V = \{(2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

(ii) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $f((a_1 + a_2x + a_3x^2, b_1 + b_2x + b_3x^2)) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_2b_1 - 3a_2b_3 + 3a_3b_3$, $B_V = \{1 + x, x - x^2, -1 - 2x^2\}$.

3.- Localizar una matriz $P \in Gl(n, K)$ de manera que $A = P^tBP$, siendo A la matriz asociada a la forma bilineal f respecto de la base B_V y B la matriz asociada a la forma bilineal f respecto de la base B'_V.

(i) $V = \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$ $\mathfrak{B}_V = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathfrak{B}'_V = \{(2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

(ii) $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $f((a_1 + a_2x + a_3x^2, b_1 + b_2x + b_3x^2)) = a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_2b_1 - 3a_2b_3 + 3a_3b_3$, $B_V = \{1 + x, x - x^2, -1 - 2x^2\}$, $B'_V = \{1, x, x^2\}$.

4.- Sea $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + bx_2y_2$ una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar b de manera que f sea degenerada. En tal caso, hallar $(\mathbb{R}^2)^\perp$

5.- Determinar el núcleo de una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

6.- Determinar la signatura de la forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ cuya matriz asociada respecto de la base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7.- Calcular la signatura de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

8.- Se considera en $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal f que tiene por matriz asociada en la base canónica a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto de f. ¿Cuál es su signatura?

Problemas

1.- Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica que satisface:

$$f(e_1, 2e_2) = 2, f(e_1, e_3) = 2, f(3e_2, 3e_3) = -6, f(e_1, e_1) = f(e_3, e_3) = 0,$$
$$f(e_2, e_2) = -1,$$

siendo $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base arbitraria de V. Calcular:

(i) La matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}$ y $f(v_1, v_2)$ con $v_1, v_2 \in V$.

(ii) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, siendo $u_1 = e_1 + e_2,\ u_2 = e_1 + e_3,\ u_3 = e_2 + e_3$.

2.- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la forma bilineal f con respecto a la base $\mathfrak{B}_V = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(i) Hallar $f(v_1, v_2)$, siendo $v_1, v_2 \in V$.

(ii) Determinar una base ortogonal respecto de f y calcular la matriz D asociada respecto de la misma.

(iii) Localizar $P \in GL(4, \mathbb{R})$ tal que $D = P^t A P$.

3.- Consideremos la forma bilineal f definida por

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$$

Estudiar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es matriz asociada a f respecto de alguna base. En caso de respuesta aformativa, calcular una base respecto de la cula sea A matriz asociada.

4.- Estudiar si los siguientes pares de matrices son congruentes. En caso de respuesta afirmativa, localizar una matriz de paso.

(i) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -14 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -14 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.- Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica con matriz asociada respecto de la base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Demostrar que f es definida positiva.

(ii) Hallar una matriz inversible P tal que $PP^t = A$.

6.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -a \\ a & 1-a & 0 \\ -a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$ la matriz asociada a un forma bilineal simétrica f de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.

(i) Hallar los valores de a para los cuales la forma f es no degenerada.

(ii) En el caso $a = 1$, calcular una base ortogonal y deducir la signatura de f.

7.- Determinar la signatura de la matriz $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, según los diferentes valores del parámetro λ.

8.- Reducir a suma de cuadrados independientes la forma cuadrática $\psi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 4xz - 4yz$

Ayuda: Calcular la forma bilineal simétrica f asociada a la forma cuadrática y buscar una base ortogonal respecto de f. En esta nueva base, hallar la expresión de ψ.