Ejercicios Resueltos Tema 5

Ejercicio 1

Estudiar si la forma bilineal $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$, siendo $1 \leq k < n$, es un producto escalar de $\mathbb{R}^n$

Solución. Observamos que f es una forma bilineal simétrica ya que

$$
\begin{aligned}
f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} y_i x_i \\
&= f((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_n)).
\end{aligned}
$$

Además es definida positiva puesto que para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$f((x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geq 0.$$

Pero no es no degenerada porque

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^n)^\perp &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = 0, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{k} x_i y_i = 0, \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) | x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Por tanto, f no es un producto escalar de $\mathbb{R}^n$

Ejercicios Resueltos Tema 5

Ejercicio 2

Empleando el método de Gram-Schmidt encontrar una base ortonormal con respecto al producto escalar $(\ ,\ )$ en el espacio euclídeo $E =< (1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 1) >$, con el producto escalar estandar $((x_1, \ldots, x_4), (y_1, \ldots, y_4)) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$.

Solución.

Una base del espacio vectorial E es $\mathfrak{B} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 1)\}$. A partir de ella vamos a construir una base ortonormal. Tomamos $u_1 = (1, -1, 0, 0)$. Buscamos $u_2 = (0, 1, 1, 1) + \alpha_1 (1, -1, 0, 0)$ verificando $(u_2, u_1) = 0$. Ahora,

$$\begin{aligned} 0 &= ((0, 1, 1, 1) + \alpha_1 (1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0)) \\ &= ((0, 1, 1, 1), (1, -1, 0, 0)) + \alpha_1 ((1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0)) \\ &= -1 + 2\alpha_1 \end{aligned}$$

implica

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}$$

luego

$$u_2 = (0,1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,0,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1).$$

Nos falta de localizar $u_3 = (2,1,0,1) + \beta_1(1,-1,0,0) + \beta_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1)$ tal que $(u_3, u_1) = 0$ y $(u_3, u_2) = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= ((2,1,0,1) + \beta_1(1,-1,0,0) + \beta_2(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1), (1,-1,0,0)) \\ &= ((2,1,0,1),(1,-1,0,0)) + \beta_1((1,-1,0,0),(1,-1,0,0)) \\ &= 1 + \beta_1 2, \end{aligned}$$

luego

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}$$

y

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & ((2,1,0,1)+\beta_1(1,-1,0,0)+\beta_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1)) \\ & = & ((2,1,0,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1))+\beta_2((\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1)) \\ & = & \frac{5}{2}+\beta_2\frac{5}{2}, \end{array}$$

implica

$$\beta_2 = -1.$$

Por tanto,

$$u_3 = (1,1,-1,0).$$

Así que la base $\{(1,-1,0,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1),(1,1,-1,0)\}$ es una base ortogonal. Sólo falta normalizarla. Para ello, dividimos cada vector por su norma y obtenemos la base ortonormal buscada:

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,0),(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5}),(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},0)\}.$$

Ejercicio 3

Se considera en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar estandar. Hallar, si es posible, todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen $f((1,0,0)) = (1/3, 2/3, -2/3)$, $f((0,1,0)) = (2/3, 1/3, 2/3)$.

Solución. Para definir una aplicación lineal, es suficiente con dar la imagen de una base y extenderla por linealidad. Si tomamos como base a $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, que es además ortonormal para el producto escalar estandar, nos falta dar la imagen de (0,0,1). Aplicando el teorema 4.2 del Tema 5, sabemos que una aplicación lineal de un espacio euclídeo es isometría si y sólo si la imagen de una base ortonormal es otra base ortonormal.

Ejercicios Resueltos Tema 5

Por tanto, para localizar todas las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que verifiquen $f((1,0,0)) = (1/3, 2/3, -2/3)$, $f((0,1,0)) = (2/3, 1/3, 2/3)$ es suficiente con buscar la imagen de $f((0,0,1)) = (a,b,c)$ tal que $\{(1/3,2/3,-2/3),(2/3,1/3,2/3),(a,b,c)\}$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Esto es, las condiciones que debemos imponer son:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & ((1/3,2/3,-2/3),(a,b,c)) = \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{2c}{3} \\ 0 & = & ((2/3,1/3,2/3),(a,b,c)) = \frac{2a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{2c}{3} \\ 1 & = & a^2 + b^2 + c^2 \end{array}$$

El sistema de ecuaciones anterior tiene dos soluciones

$$a = -2/3, b = 2/3, c = 1/3$$

y

$$a = 2/3, b = -2/3, c = -1/3.$$

Por tanto, es posible definir dos isometrías (una por cada una de las soluciones anteriores).

Ejercicios Resueltos Tema 5

Ejercicio 4

Estudiar si las siguientes matrices simétricas $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son congruentes.

Solución. Sabemos que dos matrices cuadradas del mismo orden son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura. Pero como las matrices A y B son simétricas, podemos interpretarlas como matrices asociadas a endomorfismos autoadjuntos de un espacio euclídeo E y para calcular su signatura es suficiente con calcular su polinomio característico y contar el número de valores propios mayores y menores que 0. Ahora,

$$\chi_A(x) = (x-1)(x-3)(x+1)$$

y

$$\chi_B(x) = x(x-1)(x-2).$$

Por tanto, la signatura de A es $(2,1)$ y la signatura de B es $(2,0)$, asi que no son congruentes.

Problema 1

Diagonalizar la matriz $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ mediante una matriz de paso ortogonal.

Solución. Para diagonalizar la matriz B mediante una matriz de paso ortogonal, la interpretamos como la matriz asociada a un endomorfismo autoadjunto. Aplicando el Corolario 5.7 del Tema 5, debemos buscar su polinomio característico, los subespacios fundamentales $V(\lambda)$ para λ valor propio de B y elegir vectores propios que formen una base ortonormal.

Problemas Resueltos Tema 5

Paso 1. El polinomio característico de B viene dado por:

$$\chi_B(x) = (x-9)^2(x+9)$$

Paso 2. Calculamos los subespacios fundamentales generalizados:

$$\begin{aligned} V_B(9) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 8x + 4y - z = 9x, \right. \\ &\qquad\qquad \left. 4x - 7y + 4z = 9y,\ -x + 4y + 8z = 9z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x + 4y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_B(-9) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 8x + 4y - z = -9x, \right. \\
&\qquad\qquad \left. 4x - 7y + 4z = -9y,\ -x + 4y + 8z = -9z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -4x \\ x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Paso 3. Buscamos una base formada por vectores propios:
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Paso 4. Ortonormalizamos esta base usando Gram-Scmidt:
$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{18}}{18} \\ -4\frac{\sqrt{18}}{18} \\ \frac{\sqrt{18}}{18} \end{pmatrix} \right\}.$$
Paso 5. La matriz de paso $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{18}}{18} \\ 0 & \frac{1}{3} & -4\frac{\sqrt{18}}{18} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{18}}{18} \end{pmatrix}$ satisface que

$A = PDP^t$, siendo $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Problema 2

Consideramos $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estandar. Definimos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f((x, y, z)) = (\frac{4}{5}y - \frac{3}{5}z, x, \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z).$$

(i) Empleando la definición, demostrar que f es una isometría.

(ii) Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica y comprobar que es ortogonal.

(iii) Si tomamos el producto escalar $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$, ¿es f isometría?

Solución.

(i) Para que f sea isometría debe cumplirse que $||f((x,y,z))|| = ||(x,y,z)||$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Ahora,

$$\begin{aligned} ||f((x,y,z))||^2 &= (\tfrac{4}{5}y - \tfrac{3}{5}z)^2 + x^2 + (\tfrac{3}{5}y + \tfrac{4}{5}z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 = ||(x,y,z)||^2. \end{aligned}$$

(ii) La matriz asociada a f respecto de la base canónica viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Además, $AA^t = I_3$, luego A es ortogonal.

(iii) No, f no es isometría respecto a este otro producto escalar porque

$$||f((x,y,z))||_1^2 = \frac{67}{25}y^2 + \frac{62}{25}yz + \frac{33}{25}z^2 - \frac{8}{5}xy + \frac{6}{5}xz + 2x^2$$

y

$$||(x,y,z)||_1^2 = x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 + 3z^2$$

que no coinciden. Por ejemplo,

$$||f((1,0,0)||_1^2 - ||(1,0,0)||_1^2 = 1 \neq 0.$$

Problema 3

Se considera una forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 4+a & -2 & 2 \\ -2 & a+1 & -1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

(i) Probar que f es simétrica.

(ii) Determinar para que valores de a f es producto escalar.

Solución.

(i) f es simétrica porque la matriz A es simétrica.

(ii) f es producto escalar si f es no degenerada y definida positiva. Ahora, f es no degenerada si el rango de A es 3. Pero $\mathrm{rg}(A) = 3$ si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Como $\det(A) = 6a^2 + a^3$, f es no degenerada si y sólo si $a \neq 0, -6$. Para que sea definida positiva podemos aplicar el Criterio de Sylvester y pedir que los determinantes de los menores principales sean positivos. Por tanto, las condiciones que debemos imponer son:

$$4 + a > 0, \;\; a(a+8) > 0, \;\; a(6+a) > 0.$$

o sea, si

$$a > 0$$

f es un producto escalar.