Ejercicios Resueltos Tema 4

Ejercicio 1

Estudiar si la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - 3x_1 x_2$ es una forma bilineal.

Solución. No es forma bilineal ya que

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1', x_2'), (y_1, y_2)) &= f((\alpha x_1 + \beta x_1', \alpha x_2 + \beta x_2'), (y_1, y_2)) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1')y_1 \\ &\quad -3(\alpha x_1 + \beta x_1')(\alpha x_2 + \beta x_2') \end{aligned}$$

y

Ejercicios Resueltos Tema 4

$$
\begin{aligned}
\alpha f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + \beta f((x_1',x_2'),(y_1,y_2)) &= \alpha(x_1y_1 - 3x_1x_2) \\
&\quad +\beta(x_1'y_1 - 3x_1'x_2') \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1')y_1 \\
&\quad -3\alpha x_1x_2 - 3\beta x_1'x_2'
\end{aligned}
$$

y ambas expresiones no coinciden. Por ejemplo, si $\alpha = 2$ $(x_1,x_2) = (1,1)$, $\beta = 1$, $(x_1',x_2') = (1,0)$, entonces

$$
\begin{aligned}
f(2(1,1)+(1,0),(y_1,y_2)) &= f((3,2),(y-1y_2)) \\
&= 3y_1 - 18
\end{aligned}
$$

y

$$
2f((1,1),(y_1,y_2)) + f((1,0),(y_1,y_2)) = 3y_1 - 6.
$$

Ejercicios Resueltos Tema 4

Ejercicio 2

Hallar la matriz asociada de la forma bilineal $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$
$3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2 - 8x_2y_3 + 4x_3y_2 - x_3y_3$ respecto de la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(2, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

Solución. Sea $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ la matriz asociada a la forma bilineal f respecto de la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$. Por definición de matriz asociada a una forma bilineal, el elemento a_{ij} de la matriz es $f(v_i, v_j)$. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
f((2,1,0),(2,1,0)) &= 25 \\
f((2,1,0),(1,1,1)) &= 6 \\
f((2,1,0),(0,0,1)) &= -8 \\
f((1,1,1),(2,1,0)) &= 25 \\
f((1,1,1),(1,1,1)) &= 8 \\
f((1,1,1),(0,0,1)) &= -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f((0,0,1),(2,1,0)) &= 4 \\
f((0,0,1),(2,1,0)) &= 4 \\
f((0,0,1),(0,0,1)) &= -1
\end{aligned}
$$

Por tanto la matriz pedida es

$$
A = \begin{pmatrix} 25 & 6 & -8 \\ 25 & 8 & -9 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}
$$

Ejercicios Resueltos Tema 4

Ejercicio 3

Sea $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + bx_2y_2$ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^2$. Determinar b de manera que f sea degenerada. En tal caso, hallar $(\mathbb{R}^2)^\perp$

Solución. Por definición de forma bilineal simétrica degenerada, f es degenerada si y sólo si el núcleo de f es no nulo. Ahora,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^2)^\perp &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0, \ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | f((x_1, x_2), (1, 0)) = 0 = f((x_1, x_2), (0, 1))\} \\
&= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 - 4x_2 = 0 = -4x_1 + bx_2\}.
\end{aligned}$$

Pero el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + bx_2 = 0 \end{cases}$$

es compatible indeterminado si y sólo si la matriz del sistema es de rango 1, o sea tiene determinante nulo. Por tanto, la condición que debemos imponer es:

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & b \end{vmatrix} = 2b - 16$$

y f es degenerada si y sólo si $b = 8$. En este caso,

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2)^{\perp} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 - 4x_2 = 0\} \\ &= \{(2x_2, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos Tema 4

Ejercicio 4

Calcular la signatura de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Solución. Para calcular la signatura de A necesitamos buscar una matriz diagonal D que sea congruente con A. Si interpretamos A como la matriz asociada a una aplicación bilineal simétrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$, donde V es de dimensión 3, respecto de la base $\mathfrak{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$, observamos que v_1, v_2 son dos vectores no isotropos ortogonales entre sí, luego para construir una base ortogonal de V necesitamos un tercer vector w_3 que sea ortogonal tanto a v_1 como a v_2. Ahora,

$$
\begin{aligned}
< v_1, v_2 >^{\perp} &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i | (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\qquad (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\} \\
&= \{\textstyle\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i | \alpha_1 + \alpha_3 = 0 = -\alpha_2 + 2\alpha_3\} \\
&= \{\alpha_1 v_1 - 2\alpha_1 v_2 - \alpha_1 v_3 | \alpha_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

y la base ortogonal que buscamos es $\{v_1, v_2, v_1 - 2v_2 - v_3\}$. Respecto de esta base la matriz asociada a f es

$$
D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.
$$

Por tanto, la signatura de A es $(1, 2)$.

Ejercicios Resueltos Tema 4

Ejercicio 5

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3 y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica con matriz asociada respecto de la base $\mathfrak{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f es definida positiva.

(ii) Calcular la forma cuadrática asociada a f.

Solución.

(i) Aplicando el Criterio de Sylvester basta con demostrar que los determinantes de los menores principales son todos positivos

(a) $5 > 0$;

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$;

(c) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 > 0.$

(ii) Por definición de forma cuadrática:

$$\begin{aligned} \psi(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i) &= (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \\ &= 5\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2^2 + 4\alpha_2\alpha_3 + 3\alpha_3^2 \end{aligned}$$

Problema 1

Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica que satisface:

$$f(e_1, 2e_2) = 2, f(e_1, e_3) = 2, f(3e_2, 3e_3) = -6,$$

$$f(e_1, e_1) = f(e_3, e_3) = 0, f(e_2, e_2) = -1,$$

siendo $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base arbitraria de V. Calcular:

(i) La matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}$ y $f(v_1, v_2)$ con $v_1, v_2 \in V$.

(ii) Determinar la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, siendo $u_1 = e_1 + e_2,\ u_2 = e_1 + e_3,\ u_3 = e_2 + e_3$.

Solución.

(i) Por definición de matriz asociada a la forma bilineal f respecto de una base se tiene que si $A = (a_{ij}$ es la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}$, entonces $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, luego

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, empleando la expresión matricial de una forma bilineal, se tiene que si $v = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$ y $w = \sum_{i=1}^{3} \beta_i e_i$, entonces

$$\begin{aligned} f(v, w) &= (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \\ &= \beta_1\alpha_2 + 2\beta_1\alpha_3 + \beta_2\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_2\alpha_3 + 2\beta_3\alpha_1 - \beta_3\alpha_2 \end{aligned}$$

(ii) Por la relación que existe entre matrices asociadas a la misma forma bilineal, sabemos que si B es la matriz asociada a f respecto de la base $\mathfrak{B}'$, entonces

$$\begin{aligned} B &= M_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}^t A M_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problemas Resueltos Tema 4

Problema 2

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4 y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a la forma bilineal f con respecto a la base $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

(i) Hallar $f(v, w)$, siendo $v, w \in V$.¿Es f simétrica?

(ii) Determinar, si es posible, una base ortogonal respecto de f y calcular la matriz D asociada respecto de la misma.

(iii) Localizar P matriz inversible tal que $D = P^t AP$.

Solución.

(i) De la expresión matricial de f se deduce que si $v = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$ y $w = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i$, entonces

$$\begin{aligned} f(v,w) &= (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \\ &= \beta_1\alpha_1 + \beta_1\alpha_3 + 2\beta_2\alpha_2 + 3\beta_2\alpha_3 + \\ & \quad 4\beta_2\alpha_4 + \beta_3\alpha_1 + 3\beta_3\alpha_2 + 3\beta_3\alpha_3 + \\ & \quad 5\beta_3\alpha_4 + 4\beta_4\alpha_2 + 5\beta_4\alpha_3 + 4\beta_4\alpha_4 \end{aligned}$$

Problemas Resueltos Tema 4

La forma bilineal f es simétrica porque su matriz asociada es simétrica.

(ii) Observamos que los vectores e_1 y e_2 son ambos no isótropos y además $f(e_1, e_2) = 0$, luego son ortogonales. Por tanto, para localizar una base ortogonal necesitamos dos vectores más que sean ortogonales entre sí y ortogonales a e_1 y e_2. Ahora,

$$
\begin{aligned}
< e_1, e_2 >^{\perp} &= \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i | f(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, e_1) = 0 = f(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, e_2)\} \\
&= \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i | \alpha_1 + \alpha_3 = 0 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4\} \\
&= \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i | \alpha_3 = -\alpha_1, \alpha_4 = \alpha_4, \alpha_2 = \frac{3}{2}\alpha_1 - 2\alpha_4\} \\
&= < e_1 - \tfrac{3}{2} e_2 - e_3, -2e_2 + e_4 >
\end{aligned}
$$

El vector $-2e_2 + e_4$ es ortogonal a e_1, e_2 y es no isotropo, luego puede formar parte de una bse ortogonal junto a e_1 y e_2. Para hallar el último vector que nos falta calculamos

$$
\begin{aligned}
< e_1, \quad & e_2, -2e_2 + e_4 >^{\perp} = \\
& \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i | f(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, e_1) = 0 = f(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, e_2) \\
& \qquad\qquad\qquad f(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, -2e_2 + e_4) = 0\} \\
& = \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i | 0 = \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = -\alpha_3 - 4\alpha_4\} \\
& = \{\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i | \alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3 = 4\alpha_4\} \\
& =< 4e_1 + 4e_2 - 4e_3 + e_4 >
\end{aligned}
$$

Por tanto, la base ortogonal buscada es

$$\mathfrak{B}' = \{e_1, e_2, -2e_2 + e_4, 4e_1 + 4e_2 - 4e_3 + e_4\}$$

y la matriz asociada a f respecto a ella es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}$$

(iii) Por la relación existente entre matrices asociadas a la misma aplicación lineal, se sigue que $P = M_{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}}$, esto es,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$