Ejercicios Resueltos Tema 3

Ejercicio 1

Sea A una matriz diagonalizable con forma diagonal D y matriz de paso P. Demostrar que A^n es diagonalizable con forma diagonal D^n. Deducir cuánto vale A^n.

Solución. Si A es diagonalizable con forma diagonal D y matriz de paso P significa que $A = PDP^{-1}$, luego $A^n = PD^nP^{-1}$ y, por tanto, A^n es diagonalizable con forma diagonal D^n.

Ejercicio 2

Probar que, si A es diagonalizable y A semejante a B, entonces B es también diagonalizable.

Solución. Si A es diagonalizable, entonces existe D matriz diagonal y P matriz de paso tal que

$$A = PDP^{-1}. \tag{1}$$

Por otro lado, si A semejante a B, entonces existe Q matriz de paso tal que

$$A = QBQ^{-1}. \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue

$$QBQ^{-1} = PDP^{-1} \Longrightarrow B = Q^{-1}PDP^{-1}Q.$$

Pero $T = Q^{-1}P$ es una matriz inversible (por ser el producto de dos matrices inversibles) tal que $B = TDT^{-1}$, asi que B es diagonalizable con forma diagonal D.

Ejercicios Resueltos Tema 3

Ejercicio 3

Estudiar si $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$. En caso afirmativo, determinar su forma diagonal y una matriz de paso.

Solución. Sabemos que $A \in Mat_{n\times n}(K)$ es diagonalizable si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

Ejercicios Resueltos Tema 3

- (i) Existen $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in K$, (no necesariamente distintos) tales que $\chi_A(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$.
- (ii) Para cada valor propio λ, se verifica $\dim(V_A(\lambda)) = m(\lambda)$.

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ su polinomio característico viene dado por

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 7 & -1 \\ 0 & x-4 & 0 \\ 1 & -13 & x+3 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2,$$

luego se escinde sobre $\mathbb{R}$ y se cumple (i).

Pero,

$$
\begin{aligned}
V_A(-2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - 7y + z = 0, 6y = 0, -x + 13y - z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}
$$

Así que $\dim(V_A(-2)) = 1 < 2 = m(-2)$ y A no es diagonalizable.

El polinomio característico de B es

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 6 \\ 3 & x+5 & 6 \\ -3 & -3 & x-4 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2$$

Ahora,

Ejercicios Resueltos Tema 3

$$
\begin{aligned}
V_B(-2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + 2z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x - 2z \\ z \end{pmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} > \Longrightarrow \dim(V_B(-2)) = 2 = m(-2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_B(4) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | -3x + 3y + 6z = 0, -3x - 9y - 6z = 0, \right. \\
&\qquad \left. 3x + 3y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\} \\
&=< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} > \Longrightarrow \dim(V_B(4)) = 1 = m(4).
\end{aligned}
$$

Por tanto, B cumple también la condición (ii) y es diagonalizable con forma diagonal $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Para construir la matriz de paso debemos tomar de cada subespacio fundamental una base y se colocarán en la matriz P en el mismo orden que aparezcan los valores propios. Así, para calcular la matriz de paso P debemos colocar en las dos primeras columnas una base de $V_B(-2)$ y en la tercera columna una base de $V_B(4)$. Por ejemplo,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y se cumple $B = PDP^{-1}$.

Ejercicios Resueltos Tema 3

Ejercicio 4

Calcular la cadena de subespacios fundamentales generalizados para
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. El polinomio característico de A es

$$\chi_A(x) = (x-1)(x-2)^3.$$

Por tanto, A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 1$, con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 2$, con multiplicidad algebraica 3.

Ejercicios Resueltos Tema 3

$$E_{1,A}(1) = V_A(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ 6t \\ 7t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicios Resueltos Tema 3

$$
\begin{aligned}
E_{1,A}(2) = V_A(2) \quad &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \\ -x+y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{2,A}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} | (A - 2I_4)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} | -3x + 6y - 3z - 3t = 0 = -6x + 12y - 6z - 6t, \right. \\
&\qquad \left. -7x + 14y - 7z - 7t = 0 = -x + 2y - z - t \right\}
\end{aligned}
$$

Ejercicios Resueltos Tema 3

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x+2y-z \end{pmatrix} | x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$E_{2,A}(2)$ es el subespacio fundamental generalizado máximo por ser $\dim(E_{2,A}(2)) = 3 = m(2)$.

Problema 1

Estudiar si A es semejante a B, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & -5 \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -3 \end{pmatrix}$. En caso de que lo sean, localizar una matriz de paso $B = PAP^{-1}$.

Solución. Sabemos que dos matrices diagonalizables A y B son semejantes si tienen el mismo polinomio característico. Así que vamos a estudiar si las matrices A y B son diagonalizables y si tienen el mismo polinomio característico.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x+3).$$

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ 2 & x-4 & 5 \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)^2(x+3).$$

Por tanto, ambas matrices tienen el mismo polinomio característico.
Veamos si son diagonalizables:

Problemas Resueltos Tema 3

Para A tenemos

$$\begin{aligned} V_A(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | z = 0 = 5z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \end{aligned}$$

Problemas Resueltos Tema 3

$$\begin{aligned} V_A(-3) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 5y - z = 0 = 5x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 5y \end{pmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} > . \end{aligned}$$

Problemas Resueltos Tema 3

Por consiguiente, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ es la forma diagonal de A y $A = P_1 D P_1^{-1}$, siendo $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Para B tenemos

$$\begin{aligned}
V_B(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 2y - 5z - 2x = 0 = -\tfrac{5}{3}x + \tfrac{5}{3}y - 5z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >
\end{aligned}$$

Por tanto, B no es diagonalizable, ya que $\dim(V_B(2)) = 1 < 2 = m(2)$. Por consiguiente, A no es semejante a B, porque como A es diagonalizable toda matriz semejante a A es también diagonalizable con su misma forma diagonal.

Problema 2

¿Qué debe verificar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$ sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Cuando lo sea, hallar su forma diagonal, una matriz de paso y A^n para cualquier número natural n.

Solución. Una condición necesaria, aunque no suficiente, para que A sea diagonalizable es que se escinda su polinomio característico. Ahora,

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ -a & x-1 & 0 \\ -a & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-2)$$

Además, debemos pedir que $\dim(V_A(1)) = 2$ y $\dim(V_A(2)) = 1$. Pero, $\dim(V_A(2)) = 1$ se cumple ya que al ser 2 valor propio sabemos que $1 \leq \dim(V_A(2)) \leq m(2) = 1$. Por consiguiente sólo queda calcular los valores de a para los cuáles $\dim(V_A(1)) = 2$. Ahora,

Problemas Resueltos Tema 3

$$
\begin{aligned}
V_A(1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | -y+z=0=ax=ax-y+z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | -y+z=0=ax \right\}
\end{aligned}
$$

Problemas Resueltos Tema 3

$$V_A(1) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}, & \text{si } a = 0 \\ \\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}, & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

Luego A es diagonalizable para $a = 0$.

Problemas Resueltos Tema 3

Si $a = 0$, A es diagonalizable con forma diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y para calcular una matriz de paso necesitamos hallar primero $V_A(2)$, que viene dado por:

$$\begin{aligned} V_A(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} |A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} | -x-y+z=0=-y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} |x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Entonces, P será la matriz que lleva en sus columnas tres vectores propios linealmente independientes colocados en el mismo orden que los valores propios a los que están asociados en la forma diagonal. En concreto,
$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = PDP^{-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-2^n & -1+2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$