Ejercicios Resueltos Tema 2

Ejercicio 1

Sea $f \in \mathrm{End}\ V$. Demostrar que la suma de subespacios f-invariantes es f-invariante.

Solución. Sean U, W dos subespacios f-invariantes de V. Entonces, por definición de f-invariantes, se cumple

$$f(U) \subseteq U \tag{1}$$

y

$$f(W) \subseteq W. \tag{2}$$

Ahora, $U + W$ es subespacio de V, por ser suma de subespacios, y $f(U + W) = f(U) + f(W)$, por ser f lineal y de (1) y (2) concluimos:

$$f(U + W) = f(U) + f(W) \subseteq U + W,$$

o sea, $U + W$ es también f-invariante.

Ejercicio 2

Calcular los valores propios reales λ y los subespacios fundamentales $V(\lambda)$ para $f \in \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^3)$ definido por
$f((x,y,z)) = (-x-z, -7x+4y+13z, x-3z)$.

Solución. Sabemos que los valores propios son las raíces del polinomio característico y éste viene dado por el polinomio característico de cualquier matriz asociada a f. Empleando la notación por columnasas, si elegimos la matriz asociada a f respecto de la base canónica, ésta viene dada por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico de esta matriz es

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 7 & x-4 & -13 \\ -1 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2.$$

Por tanto, los valores propios de f son 4 y -2.

Ejercicios Resueltos Tema 2

Calculamos los subespacios fundamentales

$$
\begin{aligned}
V(4) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid & & f((x,y,z)) = 4(x,y,z)\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid & & (-x-z, -7x+4y+13z, x-3z) \\
& & & = 4(x,y,z)\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid & & 5x+z=0, -7x+13z=0, x-7z=0\} \\
&= \{(0,y,0)\in\mathbb{R} \mid & & y\in\mathbb{R}\} \\
V(-2) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid & & f((x,y,z)) = -2(x,y,z)\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid & & x-z=0, -7x+6y+13z=0\} \\
&= \{(x,-x,x) \mid & & x\in\mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

Problema 1

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por
$f(x, y, z) = (3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y)$.

1. Demostrar que f es diagonalizable y encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.
2. Estudiar si las siguientes matrices están asociadas a f y, en caso afirmativo, hallar una base respecto de la cual lo estén:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución. (1) Para probar que f es diagonalizable, empezamos calculando su polinomio característico. Para ello, debemos buscar una matriz A asociada a f y calcular el polinomio característico de A. Por ejemplo, si tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a f, empleando notación por columnas, viene dada por
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo polinomio característico es

$$\chi(x) = \chi_A(x) = (x-3)(x-2)^2,$$

Problemas Resueltos Tema 2

Calculamos los subespacios fundamentales asociados a los valores propios:

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 2(x,y,z)\} \\ &= \{(x,y,-x+y) | x,y \in \mathbb{R}\} \\ V(3) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 3(x,y,z)\} \\ &= \{(x,-2x,-2x) | x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Luego, f es diagonalizable y una base respecto de la cual la matriz asociada estará formada por vectores porpios linelamente independientes. Por ejemplo, podemos tomar $\mathfrak{B} = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,-2,-2)\}$.

Problemas Resueltos Tema 2

(2) Es fácil ver que $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable porque $V_B(2)$ es de dimensión 1 y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es precisamente la forma diagonal de f.

Por tanto, C es matriz asociada a f y una base respecto de la cual lo es viene dada por $\mathfrak{B} = \{(1,0,-1),(0,1,1),(1,-2,-2)\}$.

Problemas Resueltos Tema 2

Problema 2

Se considera la familia de endomorfismos $f_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to R^3$, tal que $f_{a,b}(x, y, z) = (z, by, ax)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) Determinar los valores de a y b para los que $f_{a,b}$ es diagonalizable.
- (ii)Cuando $f_{a,b}$ sea diagonalizable, localizar su forma diagonal .

Problemas Resueltos Tema 2

Problema 2

Se considera la familia de endomorfismos $f_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to R^3$, tal que $f_{a,b}(x, y, z) = (z, by, ax)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

- (i) Determinar los valores de a y b para los que $f_{a,b}$ es diagonalizable.
- (ii)Cuando $f_{a,b}$ sea diagonalizable, localizar su forma diagonal .

Solución. Para que $f_{a,b}$ sea diagonalizable debe cumplir que su polinomio característico se escinda y que para cada valor propio λ las multiplicidades algebraicas y geométricas sean iguales. Para calcular el polinomio característico de f necesitamos hallar una matriz asociada a f y determinar el polinomio característico de ésta.

Problemas Resueltos Tema 2

Si tomamos la base canónica de $\mathbb{R}^3$ la matriz asociada a f, empleando la notación por columnas, viene dada por $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo polinomio característico es:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & x-b & 0 \\ -a & 0 & x \end{vmatrix} = (x-b)(x^2-a)$$

que se escinde sobre $\mathbb{R}$ si $a \geq 0$. Distinguimos varios casos:

Problemas Resueltos Tema 2

1. Si $a > 0$ y $b \neq \pm\sqrt{a}$, entonces f es diagonalizable por tener tres valores propios diferentes. Entonces, su forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Problemas Resueltos Tema 2

1. Si $a > 0$ y $b \neq \pm\sqrt{a}$, entonces f es diagonalizable por tener tres valores propios diferentes. Entonces, su forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

2. Si $a = b = 0$, entonces 0 es valor propio de f con multiplicidad algebraica 3 y

$$V_{f_{0,0}}(0) = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\},$$

luego $f_{0,0}$ no es diagonalizable porque $\dim V_{f_{0,0}}(0) = 2 < 3 = m(0)$.

Problemas Resueltos Tema 2

3. Si $a = 0$, $b \neq 0$, entonces $f_{0,b}$ tiene dos valores propios distintos: 0, con $m(0) = 2$ y b con $m(b) = 1$. Pero,

$$V_{f_{0,b}}(0) = \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\} .$$

Así que $f_{0,b}$ no es diagonalizable ya que $\dim V_{f_{0,b}}(0) = 1 < 2 = m(0)$.

4. Si $a > 0$ y $b = \sqrt{a}$, entonces $f_{a,\sqrt{a}}$ tiene dos valores propios distintos $\sqrt{a}$, con $m(\sqrt{a}) = 2$ y $-\sqrt{a}$, con $m(-\sqrt{a}) = 1$. Ahora, $V_{f_{a,\sqrt{a}}}(\sqrt{a}) = \{(x, y, \sqrt{a}x) | x, y \in \mathbb{R}\}$, luego $\dim(V_{f_{a,\sqrt{a}}}(\sqrt{a})) = 2 = m(\sqrt{a})$. Por consiguiente, $f_{a,\sqrt{a}}$ es diagonalizable y su forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$.

Problemas Resueltos Tema 2

5. Si $a > 0$ y $b = -\sqrt{a}$, entonces $f_{a,-\sqrt{a}}$ tiene dos valores propios distintos $\sqrt{a}$, con $m(\sqrt{a}) = 1$ y $-\sqrt{a}$, con $m(-\sqrt{a}) = 2$. Ahora, $V_{f_{a,-\sqrt{a}}}(-\sqrt{a}) = \left\{(x, y, -\sqrt{a}x) | x, y \in \mathbb{R}\right\}$, luego $\dim(V_{f_{a,-\sqrt{a}}}(-\sqrt{a})) = 2 = m(-\sqrt{a})$. Por consiguiente, $f_{a,-\sqrt{a}}$ es diagonalizable con forma diagonal $D = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}$.

Problema 3

Se considera el endomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $f(x, y, z, t) = (-x - y, -y, 2x + y + z, 2y + t)$. Hallar su forma canónica de Jordan J y una base de $\mathbb{R}^4$ respecto de la cual la matriz asociada sea J.

Solución. Si hallamos la matriz asociada a f, en notación por columnas, respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problemas Resueltos Tema 2

Asi que,

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = (x-1)^2(x+1)^2.$$

Tenemos,

$$\begin{aligned} E_1(1) &= V(1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | f((x,y,z,t)) = (x,y,z,t)\} \\ &= \{(0,0,z,t) | z,t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1(-1) &= V(-1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | f((x,y,z,t)) = -(x,y,z,t)\} \\ &= \{(x,0,-x,0) | x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(-1) &= V(1) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | (f + id_4)^2((x,y,z,t)) = (0,0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | 4x + 4z = 0 = 4y + 4t\} \\ &= \{(x,y,-x,-y) | x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Luego la forma canónica de Jordan de f es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y una base vendrá dada por:
$\{(0,0,1,0),(0,0,0,1),(-1,0,1,0),(0,1,0,-1)\}$, que se ha formado con dos vectores linealmente independientes de $V(1)$ (a saber, $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$) y un vector de $E_2(-1)-E_1(-1)$ (hemos elegido el $(0,1,0,-1)$) y
$(f+id_4)((0,1,0,-1)) = f((0,1,0,-1)) + (0,1,0,-1) = (-1,0,1,0)$.