Ejercicios Resueltos Tema 1

Ejercicio 1

Demuestra que $\mathbb{P}_3[x] = \{\sum_{i=0}^{3} a_i x^i | a_i \in \mathbb{R}, i = \{0, \ldots, 3\}\}$ con la suma usual de polinomios y la multiplicación por un escalar definida por $\lambda \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = \sum_{i=0}^{3} \lambda a_i x^i$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución. Para que $\mathbb{P}_3[x]$ sea $\mathbb{R}$-espacio vectorial se debe cumplir:

1. $(\mathbb{P}_3[x], +)$ es un grupo abeliano: Cierto porque la suma de polinomios es asociativa y conmutativa, el polinomio 0 es su elemento neutro y el opuesto de $\sum_{i=0}^{3} a_i x^i$ es $\sum_{i=0}^{3}(-a_i)x^i$.
2.
    1. $1 \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$.
    2. $(\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = \sum_{i=0}^{3}(\lambda_1 + \lambda_2) a_i x^i = \sum_{i=0}^{3}(\lambda_1 a_i + \lambda_2 a_i) x^i = \sum_{i=0}^{3} \lambda_1 a_i x^i + \sum_{i=0}^{3} \lambda_2 a_i x^i$.
    3. $\lambda \left(\sum_{i=0}^{3} a_i x^i + \sum_{i=0}^{3} b_i x^i \right) = \lambda \left(\sum_{i=0}^{3}(a_i + b_i) x^i \right) = \sum_{i=0}^{3} \lambda (a_i + b_i) x^i = \sum_{i=0}^{3}(\lambda a_i + \lambda b_i) x^i = \sum_{i=0}^{3} \lambda a_i x^i + \sum_{i=0}^{3} \lambda b_i x^i = \lambda \sum_{i=0}^{3} a_i x^i + \lambda \sum_{i=0}^{3} b_i x^i$
    4. $(\lambda_1 \lambda_2) \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = \sum_{i=0}^{3}(\lambda_1 \lambda_2) a_i x^i = \lambda_1 \sum_{i=0}^{3} \lambda_2 a_i x^i$

Ejercicios Resueltos Tema 1

Ejercicio 2

Demuestra que $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ es un $\mathbb{R}$-subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ y calcula una base. ¿Qué dimensión tiene S?

Solución. Tenemos

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_2 - 2x_1, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1, 0, -2, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) >, \end{aligned}$$

luego un sistema generador de S es
$A = \{(1, 0, -2, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$. Ahora,

$$(0, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, -2, 0) + \beta(0, 1, 1, 0) + \gamma(0, 0, 0, 1) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

o sea A es libre y, además generador; consecuentemente,
$\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base de S y la dimensión de S es 3.

Ejercicios Resueltos Tema 1

Ejercicio 3

En $\mathbb{R}^4$ se consideran las bases
$\mathfrak{B}_1 = \{(1,2,1,1),(-1,2,1,0),(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\}$ y
$\mathfrak{B}_2\{(1,2,1,1),(-1,-2,1,0),(-1,1,0,0),(-1,-1,0,0)\}$. Calcula la matriz de cambio de coordenadas de $\mathfrak{B}_1$ a $\mathfrak{B}_2$.

Solución. Por definición de matriz de cambio de coordenadas, esta lleva en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base en $\mathfrak{B}_1$ en la base $\mathfrak{B}_2$. Ahora,

1. $(1,2,1,1) = 1(1,2,1,1)+0(-1,-2,1,0)+0(-1,1,0,0)+0(-1,-1,0,0)$
2. $(-1,2,1,0) = 0(1,2,1,1)+1(-1,-2,1,0)+2(-1,1,0,0)-2(-1,-1,0,0)$
3. $(1,1,0,0) = 0(1,2,1,1)+0(-1,-2,1,0)+0(-1,1,0,0)-1(-1,-1,0,0)$
4. $(1,-1,0,0) = 0(1,2,1,1)+0(-1,-2,1,0)-1(-1,1,0,0)+0(-1,-1,0,0)$

Ejercicios Resueltos Tema 1

Entonces, la matriz de cambio de coordenadas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicios Resueltos Tema 1

Ejercicio 4

En $\mathbb{R}^4$ se considera el vector v que en la base $\{(1,2,1,1),(-1,2,1,0),(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\}$ tiene por coordenadas a
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. ¿Qué vector es?
2. ¿Qué coordenadas tiene v en la base $\{(1,2,1,1),(-1,-2,1,0),(-1,1,0,0),(-1,-1,0,0)\}$

Solución.

1. $v = (1,2,1,1) - (-1,2,1,0) + 0(1,1,0,0) + 3(1,-1,0,0) = (5,-3,0,1)$.
2. Utilizando la relación que existe entre las coordenadas de un mismo vector en dos bases diferentes, obtenemos

Ejercicios Resueltos Tema 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

luego las coordenadas de v son $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5

Estudiar si las aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x - y + 2z, x + y + 2z)$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x - y^2, y)$ son lineales.

Solución. La aplicación f es lineal ya que, para todo $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\begin{aligned}
& f((\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) \\
& = f((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)) \\
& = (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 + 2\alpha z_1 + \beta z_2, \\
& \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + 2\alpha z_1 + 2\beta z_2) \\
& = (\alpha x_1 - \alpha y_1 + 2\alpha z_1, \alpha x_1 + \alpha y_1 + 2\alpha z_1) \\
& +(\beta x_2 - \beta y_2 + 2\beta z_2, \beta x_2 + \beta y_2 + 2\beta z_2) \\
& = \alpha(x_1 - y_1 + 2z_1, x_1 + y_1 + 2z_1) + \beta(x_2 - y_2 + 2z_2, x_2 + y_2 + 2z_2) \\
& = \alpha f((x_1, y_1, z_1)) + \beta f((x_2, y_2, z_2))
\end{aligned}$$

En cambio g no es lineal ya que

$$g((0,1,0)+(0,2,0)) = g((0,3,0)) = (-9,3) \neq (-1,1)+(-4,2) = g((0,1,0))+g((0,2,0)).$$

Ejercicio 6

Se considera $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplicación lineal tal que $f((-1,-1,0)) = (1,-1)$, $f((-3,1,1)) = (2,-2)$ y $f((0,1,0)) = (1,0)$. Determinar, si es posible, $f((x,y,z))$ donde $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Solución. Los vectores $\{(-1,-1,0),(-3,1,1),(0,1,0)\}$ forman un conjunto libre de $\mathbb{R}^3$ ya que

$$(0,0,0) = \alpha(-1,-1,0)+\beta(-3,1,1)+\gamma(0,1,0) = (-\alpha-3\beta, -\alpha+\beta+\gamma, \beta) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 0 = -\alpha - 3\beta \\ 0 = -\alpha + \beta + \gamma \\ 0 = \beta \end{cases}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Además el cardinal de $\{(-1,-1,0),(-3,1,1),(0,1,0)\}$ es 3, que coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^3$, luego $\{(-1,-1,0),(-3,1,1),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y podemos expresar $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ como combinación lineal de $\{(-1,-1,0),(-3,1,1),(0,1,0)\}$. En efecto,

$$(x, y, z) = -(x + 3z)(-1, -1, 0) + z(-3, 1, 1) + (y - x - 4z)(0, 1, 0),$$

Entonces, como f es lineal, se cumple

$$\begin{aligned} f((x, y, z)) &= -(x + 3z)f((-1, -1, 0)) + zf((-3, 1, 1)) \\ &\quad +(y - x - 4z)f((0, 1, 0)) \\ &= -(x + 3z)(1, -1) + z(2, -1) + (y - x - 4z)(1, 0) \\ &= (-2x + y - 5z, x + 2z). \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos Tema 1

Ejercicio 7

Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f((x,y,z)) = (-2x + y - 5z, x + 2z)$. Calcula la matriz asociada a f respecto de las bases $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1,-1,0),(0,1,-1),(1,1,1)\}$ y $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1,-1),(1,1)\}$.

Solución. Por definición de matriz asociada debemos calcular las coordenadas en la base $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$ de las imágenes de los vectores de la base de $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^3}$. Ahora,

1. $f((1,-1,0)) = (-3,1) = -2(1,-1) - 1(1,1)$
2. $f((0,1,-1)) = (6,-2) = 4(1,-1) + 2(1,1)$
3. $f(1,1,1) = (-6,3) = -\frac{9}{2}(1,-1) - \frac{3}{2}(1,1)$

Entonces la matriz asociada pedida es: $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -\frac{9}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8

Calcular los valores propios reales y los subespacios fundamentales $V_A(\lambda)$ para $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -7 & 4 & 13 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución. Sabemos que los valores propios son las raíces del polinomio característico de A que es

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 7 & x-4 & -13 \\ -1 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-4)(x+2)^2.$$

Por tanto, los valores propios de A son 4 y -2.

Ejercicios Resueltos Tema 1

Calculamos los subespacios fundamentales

$$\begin{aligned} V_A(4) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 5x + z = 0, -7x + 13z = 0, x - 7z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} | y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos Tema 1

$$
\begin{aligned}
V_A(-2) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - z = 0, -7x + 6y + 13z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Problemas Resueltos Tema 1

Problema 1

Sea V un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial de dimensión 4 con base $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Se definen los vectores

$$v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3 \qquad v_2 = 2u_1 + u_3 + 2u_4 \qquad v_3 = u_1 + u_2 - u_3$$

$$v_4 = -u_1 + 2u_3 + 3u_4$$

Probar que $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V y calcular la relación entre las coordenadas de un vector en la base $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$.

Solución. Como $\mathfrak{B}'$ es de cardinal 4 y V es de dimensión 4, para demostrar que $\mathfrak{B}'$ es base de V, basta con probar que $\mathfrak{B}'$ es libre. Ahora,

$$\begin{aligned} 0_V &= \sum_{i=1}^{4} \alpha_i v_i = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)u_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)u_2 \\ &+(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4)u_3 + (2\alpha_2 + 3\alpha_4)u_4, \end{aligned}$$

y al ser $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un conjunto libre, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \\ 0 &= \alpha_1 + \alpha_3 \\ 0 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 \\ 0 &= 2\alpha_2 + 3\alpha_4 \end{aligned}$$

y la única solución del sistema anterior es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

luego $\mathfrak{B}'$ es libre.

Ejercicios Resueltos Tema 1

Por la relación existente entre las coordenadas de un mismo vector en dos bases, debemos calcular la matriz de cambio de coordenadas entre ambas. Esta matriz lleva en sus columnas las coordenadas de los vectores de una base en la otra. Así,

$$M_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'} = M_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -8 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, si $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de v respecto de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{B}'$, respectivamente, entonces

Problemas Resueltos Tema 1

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 7 & 8 & -5\\ 0 & -3 & -3 & 2\\ -1 & -6 & -8 & 5\\ 0 & 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}$$

Problemas Resueltos Tema 1

Problema 2

Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$f((x,y,z)) = (3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y)$.

1. Demostrar que es lineal
2. Calcular la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$
3. Hallar los valores propios de f
4. Calcular los subespacios fundamentales de f.

Solución.

1. Para demostrar que f es lineal hay que demostrar

- (i) $f((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) = f(((x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2))$
$= (3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2), -2(x_1 + x_2) + 4(y_1 + y_2) - 2(z_1 + z_2), -2(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2)) = (3x_1 - y_1 + z_1, -2x_1 + 4y_1 - 2z_1, -2x_1 + 2y_1) + (3x_2 - y_2 + z_2, -2x_2 + 4y_2 - 2z_2, -2x_2 + 2y_2)$
$= f((x_1,y_1,z_1)) + f((x_2,y_2,z_2))$

Problemas Resueltos Tema 1

- (ii)$f(\alpha(x,y,z)) = f((\alpha x, \alpha y, \alpha z)) =$
  $(3\alpha x - \alpha y + \alpha z, -2\alpha x + 4\alpha y - 2\alpha z, -2\alpha x + 2\alpha y)$
  $= \alpha(3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y) = \alpha f((x,y,z))$.

2. La matriz asociada a f lleva en sus columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base canónica en la base canónica.

Entonces, la matriz asociada a f viene dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. El polinomio polinomio característico viene dado por

$$\chi(x) = \chi_A(x) = (x-3)(x-2)^2,$$

luego 2 y 3 son los valores propios de f.

4. Calculamos los subespacios fundamentales asociados a los valores propios:

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 2(x,y,z)\} \\ &= \{(x,y,-x+y) | x,y \in \mathbb{R}\} \\ V(3) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f((x,y,z)) = 3(x,y,z)\} \end{aligned}$$