Problemas Resueltos Anexo

Problema 1

Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio mónico. Demostrar que todas sus raíces racionales son enteras.

Solución. Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con $(a, b) = 1$, una raíz racional de $f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Entonces,

$$0 = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{a^i}{b^i}$$

implica

$$c_n a^n = -b(c_{n-1} a^{n-1} b^0 + \dots c_0 a^0 b^{n-1})$$

luego b divide a $c_n a^n$. Pero como a y b son coprimos entre sí, se sigue que b divide a c_n. Además, al ser $f(x)$ mónico sabemos que $c_n = 1$. Por tanto, b divide a 1, luego $b = \pm 1$ y la raíz es entera.

Problema 2

Encontrar las raíces racionales del polinomio $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Solución. Como es un polinomio mónico, sabemos que sus raices son enteras. Además, un argumento similar al del ejercicio anterior prueba que si a es raíz entera de $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$, entonces a es un divisor de $c_0 = 2$. Luego las posibles raíces racionales de este polinomio son $\pm 1, \pm 2$. Como $f(1) = f(2) = 0$ y $f(-1), f(-2) \neq 0$, entonces 1 y 2 son las raíces enteras de $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Problemas Resueltos Anexo

Problema 3

Calcular las raíces racionales múltiples de

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8.$$

Solución. Las raíces racionales de $f(x)$, si es que existen, serán enteras por ser $f(x)$ mónico. Además, deben de ser divisores de -8, luego las posibles raíces racionales son $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$.
Por otro lado, si a es raíz múltiple de $f(x)$, también será raíz de su derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4,$$

luego las posibles raíces múltiples de $f(x)$ son $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Ahora, $f(1), f(-2), f(\pm 4) \neq 0$, luego no son raíces de $f(x)$ y $f(-1) = f(2) = 0$ implica que (-1) y 2 son raíces de $f(x)$. Como además $f'(-1) \neq 0$ y $f'(2) = 0$, se sigue que la única raíz múltiple de $f(x)$ es 2.

Problema 4

Demostrar que $x^4 + 4$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ y que es reducible sobre $\mathbb{Q}$.

Solución. Como $x^4 + 4$ es siempre mayor que igual a 4 para cada $x \in \mathbb{Q}$, se sigue que $x^4 + 4$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$. Ahora,

$$x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2),$$

luego es reducible sobre $\mathbb{Q}$.

Problemas Resueltos Anexo

Problema 5

Factorizar $f(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ como producto de irreducibles sobre $\mathbb{Q}$.

Solución. Observamos que -1 es raíz de $f(x)$ y de $f'(x)$, luego $(x+1)^2$ divide a $f(x)$. Si hacemos esta división, se sigue que

$$f(x) = (x+1)^2(x^4 + 2x^2 + 1).$$

Pero $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$, luego

$$f(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2.$$

Problemas Resueltos Anexo

Además $x+1$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por ser de grado 1 y x^2+1 es también irreducible sobre $\mathbb{Q}$ por ser de grado 2 y no tener raíces racionales. Por tanto, la descomposición en factores irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ de $f(x)$ es

$$f(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2.$$