5. Endomorfismos autoadjuntos. Teorema espectral.

Definición. Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Se dice que g es un **endomorfismo autoadjunto** si para cualesquiera vectores v, v' de E se verifica $(v, g(v')) = (g(v), v')$.

Teorema 5.1. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es un endomorfismo autoadjunto si y sólo si la matriz asociada a g respecto de una base ortonormal $\mathfrak{B}$ es una matriz simétrica.*

Los endomorfismos autoadjuntos nos servirán para demostrar que toda matriz simétrica real es diagonalizable con una matriz de paso P ortogonal. Para probarlo se demostrarán varios lemas.

Lema 5.2. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces, su polinomio característico $\chi_A(x)$ se escinde sobre $\mathbb{R}$.*

Como consecuencia del lema anterior deducimos que todos los valores propios de una maatriz simétrica son reales. Además, como los endomorfismos autoadjuntos tienen al menos una matriz simétrica como matriz asociada se deduce que tienen todos sus valores propios reales.

Lema 5.3. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto y U un subespacio g-invariante no nulo. Entonces, U contiene vectores propios de g.*

Lema 5.4. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto y U un subespacio g-invariante. Entonces, $U^\perp$ es g-invariante.*

Lema 5.5. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dos valores propios distintos de g. Entonces, $V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_2)$ son subespacios ortogonales.*

Recordar que $V(\lambda)$ es el subespacio fundamental asociado al valor propio λ.

Teniendo estos lemas en cuenta, es fácil demostrar:

Teorema 5.6. Teorema espectral para un endomorfismo autoadjunto. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces, existe una base ortonormal de E formada por vectores propios de g.*

La demostración de este teorema es una demostración constructiva, esto es, se da un método que permite localizar una base ortonormal de E formada por vectores propios de g.

Como corolario de este teorema se deduce

Corolario 5.7. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces, A es diagonalizable con forma diagonal D y existe una matriz P ortogonal que es matriz de paso entre A y D.*

Observación. Según el corolario anterior, si A es una matriz simétrica real, entonces existe D forma diagonal de A y P ortogonal tal que $A = PDP^{-1}$. Pero al ser P ortogonal $P^{-1} = P^t$, luego

$$A = PDP^{-1} = PDP^t \qquad \Rightarrow A \text{ y } D \text{ son congruentes.}$$

Pero si A y D son congruentes la signatura de A y la signatura de D coinciden. Además, al ser D la forma diagonal de A, sabemos que en la diagonal principal de D aparecen los valores propios reales de A, tantas veces como indique su multiplicidad. Así que podemos dar otro método para buscar la signatura de una matriz simétrica real A:

1. Localizar el polinomio característico de A.

2. Localizar las raíces, junto con su multiplicidad, del polinomio característico de A.

3. Contar los valores propios mayores que 0 (contando multiplicidades) y menores que 0. Estos dos números serán los que nos den la signatura de A.