4. Isometrías.

Definición. Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Se dice que g es una **isometría** si para cualquier vector $v \in E$ se cumple $||v|| = ||g(v)||$.

Esto es, las isometrías de un espacio euclídeo son aquellas endormofismos del él en sí mismo que conservan la norma.

Tenemos las siguientes caracterizaciones equivalentes del concepto de isometría:

Teorema 4.1. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es isometría si y sólo si $(g(v), g(v')) = (v, v')$ para cualesquiera vectores v, v' de E.*

Teorema 4.2. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es isometría si y sólo $\mathfrak{B}' = \{g(u_1), \ldots, g(u_n)\}$ es una base ortonormal de E.*

Del teorema anterior es fácil deducir que las isometrías son aplicaciones biyectivas.

Teorema 4.3. *Sea $(E, (\,,\,))$ un espacio euclídeo, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es isometría si y sólo la matriz asociada a g respecto de $\mathfrak{B}$ es ortogonal.*

Como observación al teorema anterior indicamos que si g es una isometría y la base con la que se trabaja no es ortonormal, entonces no podemos asegurar que la matriz asociada a g sea ortogonal.