2. Bases ortonormales.

En un espacio euclídeo E con producto escalar $(,)$, sabemos por el tema anterior que existen bases ortogonales. Además, cuando tomemos una base ortogonal de E, la matriz asociada al producto escalar $(,)$ es una matriz diagonal con entrada mayores que 0 en la diagonal principal, por ser la signatura de un producto escalar $(n, 0)$, donde n es la dimensión del espacio vectorial E. Si cada vector de la base ortogonal es dividido por su norma, resulta que la matriz asociada respecto de esta nueva base ortogonal es la matriz identidad. Debido a la sencillez de esta matriz asociada, nos interesa trabajar con este tipo de bases ortogonales, que son las conocidas como bases ortonormales, esto es

Definición. Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$. Una base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ del espacio euclídeo E se dice que es **base ortonormal** si todos sus vectores son de norma 1 y son ortogonales dos a dos, esto es,

$$(v_i, v_i) = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

y

$$(v_i, v_j) = 0 \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$$

Observamos que el ser base ortonormal esa íntimamente ligado al producto escalar con el que se trabaja. De hecho, si tenemos un mismo espacio E dotado con dos productos escalares una base puede ser ortonormal para un producto escalar y no para el otro.

Como ya se ha comentado, si tenemos una base ortogonal de un espacio euclídeo E es fácil crear a partir de ella una base ortonormal. Para construir una base ortogonal, podemos utilizar la técnica dada en el tema anterior que empleaba vectores no isótropos. Además, en los espacios euclídeos disponemos de otra técnica: es la que se da en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt: permite obtener bases ortonormales, empleando las propiedades del producto escalar y partiendo de una base arbitraria de E. Este método es más sencillo que el método de obtención de bases ortogonales visto en el tema anterior para una forma bilineal simétrica, lo que justifica su demostración.

Teorema 2.1. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo y $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E. Entonces, existe una base $\mathfrak{B}'$ ortogonal cuyo primer elemento es v_1 y tal que $M_{\mathfrak{B}', \mathfrak{B}}$ es triangular.*

El esquema de la demostración del teorema anterior es el siguiente:

1. Se toma $u_1 = v_1$.
2. Se toma $u_2 = v_2 + \alpha_{2,1} u_1$, eligiendo $\alpha_{2,1}$ de forma que $0 = (u_1, u_2)$.

3. En general se define $u_i = v_i + \alpha_{i,1}u_1 + \alpha_{i,2}u_2 + \ldots + \alpha_{i,i-1}u_{i-1}$, tomando $\alpha_{i,j}$ de forma que $(u_i, u_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, i-1$. Se tiene que, $\alpha_{i,j} = -\frac{(v_i,u_j)}{(u_j,u_j)}$, para $j = 1, \ldots, i-1$.

A partir de la base ortogonal que nos da el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se puede construir una base ortonormal dividiendo cada vector por su norma. Según se observa en la demostración del resultado anterior, podemos "elegir" cuál va a ser el primer vector de la nueva base ortogonal: es el que tomemos como primer vector en la base de partida.