1. Producto escalar. Espacios euclídeos.

Definición. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $f : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Se dice que f es un **producto escalar** de E si f es definida positiva y no degenerada. En este caso, se dice que E es un **espacio euclídeo** con producto escalar f.

Normalmente, cuando E es un espacio euclídeo al producto escalar de los vectores v_1 y v_2 se le denota por (v_1, v_2).

Definición. Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y $v \in E$. Se llama **norma de** v a

$$||v|| = \sqrt{(v,v)}.$$

Existe una forma sencilla de caracterizar los productos escalares:

Proposición 1.1. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces, f es producto escalar si y sólo si la signatura de f es $(n, 0)$.*

Las propiedades más interesantes de los espacios euclídeos son:

(1) En un espacio euclídeo E el único vector de norma 0 (y, por tanto, el único vector isótropo) es el vector 0_E.

(2) Dado un vector $v \neq 0_E$ de un espacio euclídeo E con producto escalar f sabemos que se puede expresar $E = < v > \oplus < v >$. Entonces, cualquier vector $w \in E$ se expresará como $\lambda v + u$, donde $u \in < v >$, siendo $\lambda = f(v, w)/||v||^2$. A $\lambda = f(v, w)/||v||^2$ se le conoce como **proyección ortogonal de** w **sobre** v.

También tenemos dos desigualdades que relacionan el producto escalar y la norma en un espacio euclídeo:

Proposición 1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y norma $||\ ||$. Entonces, se verifica*

$$|(u, v)| \leq ||u||\ ||v||, \qquad \forall u, v \in E.$$

Proposición 1.3. Desigualdad de Minkowski. *Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y norma $||\ ||$. Entonces, se verifica*

$$||u + w|| \leq ||u|| + ||w|| \qquad \forall u, w \in E.$$

Por último, introducimos el concepto de **ángulo entre dos vectores** $u, v \in E$, donde E es un espacio euclídeo con producto escalar $(\,,\,)$ que es el arco $\alpha \in [0, \pi]$ cuyo coseno es $\frac{(u,v)}{||u||\ ||v||}$.

Es fácil demostrar

Proposición 1.4. Ley del coseno. *Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(\,,\,)$ y norma $||\ ||$. Entonces,*

$$||u - v|| = ||u|| + ||v|| - 2||u||\ ||v|| \cos \alpha, \qquad \forall u, v \in E,$$

siendo α el ángulo entre u y v.