Tema 5: Espacios Euclídeos.

1. Producto escalar. Espacios euclídeos.

Definición. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $f : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Se dice que f es un **producto escalar** de E si f es definida positiva y no degenerada. En este caso, se dice que E es un **espacio euclídeo** con producto escalar f.

Normalmente, cuando E es un espacio euclídeo al producto escalar de los vectores v_1 y v_2 se le denota por (v_1, v_2).

Definición. Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y $v \in E$. Se llama **norma de** v a

$$||v|| = \sqrt{(v, v)}.$$

Existe una forma sencilla de caracterizar los productos escalares:

Proposición 1.1. *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $f : E \times E \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Entonces, f es producto escalar si y sólo si la signatura de f es $(n, 0)$.*

Las propiedades más interesantes de los espacios euclídeos son:

(1) En un espacio euclídeo E el único vector de norma 0 (y, por tanto, el único vector isótropo) es el vector 0_E.

(2) Dado un vector $v \neq 0_E$ de un espacio euclídeo E con producto escalar f sabemos que se puede expresar $E =< v > \oplus < v >^\perp$. Entonces, cualquier vector $w \in E$ se expresará como $\lambda v + u$, donde $u \in < v >^\perp$, siendo $\lambda = f(v, w)/||v||^2$. A $\lambda = f(v, w)/||v||^2$ se le conoce como **proyección ortogonal de** w **sobre** v.

También tenemos dos desigualdades que relacionan el producto escalar y la norma en un espacio euclídeo:

Proposición 1.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y norma $||\ ||$. Entonces, se verifica*

$$|(u, v)| \leq ||u||\ ||v||, \qquad \forall u, v \in E.$$

Proposición 1.3. Desigualdad de Minkowski. *Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y norma $||\ ||$. Entonces, se verifica*

$$||u + w|| \leq ||u|| + ||w|| \qquad \forall u, w \in E.$$

Por último, introducimos el concepto de **ángulo entre dos vectores** $u, v \in E$, donde E es un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ que es el arco $\alpha \in [0, \pi]$ cuyo coseno es $\frac{(u,v)}{||u||\ ||v||}$.

Es fácil demostrar

Proposición 1.4. Ley del coseno. *Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$ y norma $||\ ||$. Entonces,*

$$||u - v|| = ||u|| + ||v|| - 2||u||\ ||v|| \cos\alpha, \qquad \forall u, v \in E,$$

siendo α el ángulo entre u y v.

2. Bases ortonormales.

En un espacio euclídeo E con producto escalar $(,)$, sabemos por el tema anterior que existen bases ortogonales. Además, cuando tomemos una base ortogonal de E, la matriz asociada al producto escalar $(,)$ es una matriz diagonal con entrada mayores que 0 en la diagonal principal, por ser la signatura de un producto escalar $(n, 0)$, donde n es la dimensión del espacio vectorial E. Si cada vector de la base ortogonal es dividido por su norma, resulta que la matriz asociada respecto de esta nueva base ortogonal es la matriz identidad. Debido a la sencillez de esta matriz asociada, nos interesa trabajar con este tipo de bases ortogonales, que son las conocidas como bases ortonormales, esto es

Definición. Sea E un espacio euclídeo con producto escalar $(,)$. Una base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ del espacio euclídeo E se dice que es **base ortonormal** si todos sus vectores son de norma 1 y son ortogonales dos a dos, esto es,

$$(v_i, v_i) = 1 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

y

$$(v_i, v_j) = 0 \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$$

Observamos que el ser base ortonormal esa íntimamente ligado al producto escalar con el que se trabaja. De hecho, si tenemos un mismo espacio E dotado con dos productos escalares una base puede ser ortonormal para un producto escalar y no para el otro.

Como ya se ha comentado, si tenemos una base ortogonal de un espacio euclídeo E es fácil crear a partir de ella una base ortonormal. Para construir una base ortogonal, podemos utilizar la técnica dada en el tema anterior que empleaba vectores no isótropos. Además, en los espacios euclídeos disponemos de otra técnica: es la que se da en el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt: permite obtener bases ortonormales, empleando las propiedades del producto escalar y partiendo de una base arbitraria de E. Este método es más sencillo que el método de obtención de bases ortogonales visto en el tema anterior para una forma bilineal simétrica, lo que justifica su demostración.

Teorema 2.1. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt. *Sea* $(E, (,))$ *un espacio euclídeo y* $\mathfrak{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base de* E*. Entonces, existe una base* $\mathfrak{B}'$ *ortogonal cuyo primer elemento es* v_1 *y tal que* $M_{\mathfrak{B}',\mathfrak{B}}$ *es triangular.*

El esquema de la demostración del teorema anterior es el siguiente:

1. Se toma $u_1 = v_1$.
2. Se toma $u_2 = v_2 + \alpha_{2,1}u_1$, eligiendo $\alpha_{2,1}$ de forma que $0 = (u_1, u_2)$.
3. En general se define $u_i = v_i + \alpha_{i,1}u_1 + \alpha_{i,2}u_2 + \ldots + \alpha_{i,i-1}u_{i-1}$, tomando $\alpha_{i,j}$ de forma que $(u_i, u_j) = 0$ para $j = 1, \dots, i-1$. Se tiene que, $\alpha_{i,j} = -\frac{(v_i,u_j)}{(u_j,u_j)}$, para $j = 1, \dots, i-1$.

A partir de la base ortogonal que nos da el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se puede construir una base ortonormal dividiendo cada vector por su norma. Según se observa en la demostración del resultado anterior, podemos "elegir" cuál va a ser el primer vector de la nueva base ortogonal: es el que tomemos como primer vector en la base de partida.

3. Matrices ortogonales.

Definición. Una matriz simétrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una **matriz ortogonal** si AA^t es I_n.

Es fácil demostrar que

Proposición 3.1. *Sea* $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ *una matriz ortogonal. Entonces,* A *es inversible y su determinante es* ± 1.

Tenemos una propiedad que nos indica como es la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales:

Teorema 3.2. *Sea E un espacio euclídeo de dimensión n, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal y $\mathfrak{B}' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ una base . Entonces, $\mathfrak{B}'$ es ortonormal si y sólo si $M_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}'}$ es ortogonal.*

4. Isometrías.

Definición. Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Se dice que g es una **isometría** si para cualquier vector $v \in E$ se cumple $||v|| = ||g(v)||$.

Esto es, las isometrías de un espacio euclídeo son aquellas endormofismos del él en sí mismo que conservan la norma.

Tenemos las siguientes caracterizaciones equivalentes del concepto de isometría:

Teorema 4.1. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es isometría si y sólo si $(g(v), g(v')) = (v, v')$ para cualesquiera vectores v, v' de E.*

Teorema 4.2. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es isometría si y sólo $\mathfrak{B}' = \{g(u_1), \ldots, g(u_n)\}$ es una base ortonormal de E.*

Del teorema anterior es fácil deducir que las isometrías son aplicaciones biyectivas.

Teorema 4.3. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es isometría si y sólo la matriz asociada a g respecto de $\mathfrak{B}$ es ortogonal.*

Como observación al teorema anterior indicamos que si g es una isometría y la base con la que se trabaja no es ortonormal, entonces no podemos asegurar que la matriz asociada a g sea ortogonal.

5. Endomorfismos autoadjuntos. Teorema espectral.

Definición. Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Se dice que g es un **endomorfismo autoadjunto** si para cualesquiera vectores v, v' de E se verifica $(v, g(v')) = (g(v), v')$.

Teorema 5.1. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $\mathfrak{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de E y $g : E \to E$ una aplicación lineal. Entonces, g es un endomorfismo autoadjunto si y sólo si la matriz asociada a g respecto de una base ortonormal $\mathfrak{B}$ es una matriz simétrica.*

Los endomorfismos autoadjuntos nos servirán para demostrar que toda matriz simétrica real es diagonalizable con una matriz de paso P ortogonal. Para probarlo se demostrarán varios lemas.

Lema 5.2. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces, su polinomio característico $\chi_A(x)$ se escinde sobre $\mathbb{R}$.*

Como consecuencia del lema anterior deducimos que todos los valores propios de una maatriz simétrica son reales. Además, como los endomorfismos autoadjuntos tienen al menos una matriz simétrica como matriz asociada se deduce que tienen todos sus valores propios reales.

Lema 5.3. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto y U un subespacio g-invariante no nulo. Entonces, U contiene vectores propios de g.*

Lema 5.4. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto y U un subespacio g-invariante. Entonces, $U^{\perp}$ es g-invariante.*

Lema 5.5. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dos valores propios distintos de g. Entonces, $V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_2)$ son subespacios ortogonales.*

Recordar que $V(\lambda)$ es el subespacio fundamental asociado al valor propio λ.

Teniendo estos lemas en cuenta, es fácil demostrar:

Teorema 5.6. Teorema espectral para un endomorfismo autoadjunto. *Sea $(E, (,))$ un espacio euclídeo, $g : E \to E$ un endomorfismo autoadjunto. Entonces, existe una base ortonormal de E formada por vectores propios de g.*

La demostración de este teorema es una demostración constructiva, esto es, se da un método que permite localizar una base ortonormal de E formada por vectores propios de g.

Como corolario de este teorema se deduce

Corolario 5.7. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces, A es diagonalizable con forma diagonal D y existe una matriz P ortogonal que es matriz de paso entre A y D.*

Observación. Según el corolario anterior, si A es una matriz simétrica real, entonces existe D forma diagonal de A y P ortogonal tal que $A = PDP^{-1}$. Pero al ser P ortogonal $P^{-1} = P^t$, luego

$$A = PDP^{-1} = PDP^t \qquad \Rightarrow A \text{ y } D \text{ son congruentes.}$$

Pero si A y D son congruentes la signatura de A y la signatura de D coinciden. Además, al ser D la forma diagonal de A, sabemos que en la diagonal principal de D aparecen los valores propios reales de A, tantas veces como indique su multiplicidad. Así que podemos dar otro método para buscar la signatura de una matriz simétrica real A:

1. Localizar el polinomio característico de A.

2. Localizar las raíces, junto con su multiplicidad, del polinomio característico de A.

3. Contar los valores propios mayores que 0 (contando multiplicidades) y menores que 0. Estos dos números serán los que nos den la signatura de A.