

## 7. Formas definidas positivas y negativas.

En este apartado estudiamos unas formas bilineales simétricas reales especiales: las definidas positivas y las definidas negativas. Será interesante un estudio inicial de las mismas porque las formas bilineales definidas positivas no degeneradas son lo que se conocen como productos escalares que se analizarán en profundidad en el siguiente tema.

**Definición.** Una forma bilineal simétrica real  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **definida positiva** si  $f(v, v) \geq 0$  para cualquier vector  $v$  de  $V$ .

**Definición.** Una forma bilineal simétrica real  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es **definida negativa** si  $f(v, v) \leq 0$  para cualquier vector  $v$  de  $V$ .

En términos de matrices, se dice que una matriz simétrica real  $A$  es **definida positiva** si  $XAX^t \geq 0$  para cualquier vector  $X = (x_1 \dots x_n) \in Mat_{1 \times n}(\mathbb{R})$  y **definida negativa** si  $XAX^t \leq 0$  para cualquier vector  $X = (x_1 \dots x_n) \in Mat_{1 \times n}(\mathbb{R})$ .

Es fácil ver que una forma bilineal simétrica real es definida positiva si y sólo si tiene matrices asociadas definidas positivas y es definida negativa si y sólo si tienen por matriz asociada a matrices definidas negativas.

Además, existe una caracterización de las matrices definidas positivas y negativas muy sencilla de comprobar, que en combinación con el resultado anterior nos permitirá conocer de forma rápida si una forma bilineal simétrica real es definida positiva o no. Esta caracterización es conocida como Criterio de Sylvester

**Teorema 7.1. Criterio de Sylvester.** *Sea  $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$  una matriz simétrica real y  $\Delta_j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{pmatrix}$ . Entonces,*

(i) *Si  $\Delta_j > 0$  para  $j = 1 \dots n$ , entonces  $A$  es definida positiva.*

(ii) *Si  $(-1)^j \Delta_j < 0$  para  $j = 1 \dots n$ , entonces  $A$  es definida negativa.*