6. Ley de Inercia.

Una vez que se ha demostrado la existencia de base ortogonal para las formas bilineales simétricas sobre cualquier cuerpo K, analizamos en este apartado el caso particular de las formas bilineales simétricas reales, esto es, aquellas que se definen sobre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Es evidente que si se trabaja con una forma bilineal simétrica real $f : V \times V \to \mathbb{R}$, entonces dado un vector $v \in V$ puede suceder que $f(v,v) < 0$, $f(v,v) > 0$, ó $f(v,v) = 0$. Por otro lado, al ser f una forma bilineal simétrica real existe una base ortogonal y consecuentemente, la matriz asociada a f respecto de una base ortogonal va a ser diagonal.

Teorema 6.1. Ley de inercia. *Sea $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica real y $\mathfrak{B}_V$ y $\mathfrak{B}'_V$ dos bases de V ortogonales respecto de f. Si r_1 denota el número de entradas positivas en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$, r_2 denota el número de entradas mayores que 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, s_1 denota el número de entradas menores que 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$, s_2 denota el número de entradas menores que 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, t_1 denota el número de entradas iguales a 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ y t_2 denota el número de entradas iguales a 0 en la diagonal principal de la matriz $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$, entonces*

$$r_1 = r_2 \qquad s_1 = s_2 \qquad t_1 = t_2.$$

La ley de inercia motiva la definición de **signatura de una forma bilineal simétrica real**. Dada una forma bilineal simétrica real f se llama **signatura de** f al par (r,s), donde r es el número de entradas mayores que 0 que aparecen en la diagonal principal de una matriz diagonal asociada a f y s es el número de entradas menores que 0 que aparecen en dicha diagonal.

Lo primero que se observa es que vía la signatura podemos saber si una forma bilineal simétrica real es degenerada o no. Las no degeneradas serán aquellas en las que $r+s$ coincida con la dimensión del espacio vecotrial V sobre el que está definida la forma bilineal simétrica real.

Interpretando una matriz simétrica real A como la matriz asociada a una forma bilineal simétrica real f, sabemos que A es congruente con una matriz diagonal D y empleando la ley de inercia aplicada a f, podemos definir el concepto de **signatura de una matriz simétrica real** como sigue: es el par (r,s), donde r es el número de entradas mayores que 0 que aparecen en la diagonal una matriz diagonal congruente con A y donde s es el número de entradas menores que 0 que aparecen en dicha diagonal.

La importancia del concepto de signatura reside en el último resultado que se prueba en este apartado: la signatura nos permite caracterizar las matrices congruentes.

Teorema 6.2. *Sean* $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *dos matrices simétricas reales. Entonces,* A *y* B *son congruentes si y sólo si poseen la misma signatura.*

Por otro lado, aplicando este resultado al caso particular de las matrices asociadas a una misma forma bilineal simétrica real, podemos determinar si una matriz simétrica real es matriz asociada a una forma bilineal simétrica real dada o no: bastará que la signatura de la matriz y de f coincidan.