5. Bases ortogonales.

Cuando se trabaja con formas bilineales simétricas se pueden construir un tipo de bases especiales: las ortogonales.

Definición. Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial V. Se dice que $\mathfrak{B}_V$ es una **base ortogonal** respecto de f si $f(v_i, v_j) = 0_K$, para cualesquiera vectores distintos v_i, v_j de $\mathfrak{B}_V$.

La importancia de las bases ortogonales radica en que la matriz asociada a la forma bilineal simétrica f respecto de una base ortogonal es diagonal. Debido a la sencillez de la matriz asociada, nos interesa tener un método que nos permita localizar estas bases ortogonales. Para ello, necesitamos introducir un concepto: el de vector isótropo.

Definición. Un vector v se dice que es **isótropo** respecto de la forma bilineal simétrica f si $f(v, v) = 0_K$. En caso contrario, se dice que v es **no isótropo**.

Es fácil demostrar que los vectores del núcleo de una forma bilineal son todos isótropos y que, en general, el conjunto de vectores isótropos no forma un subespacio de V. Además, también se prueba que la única forma bilineal que tiene todos los vectores isótropos es la forma bilineal nula.

Los vectores no isótropos tienen la siguiente propiedad

Lema 5.1. *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica y $v \in V$ un vector no isótropo respecto de f. Entonces $V = < v > \oplus < v >^{\perp}$.*

Teniendo en cuenta el lema anterior, podemos dar un método que permite obtener bases ortogonales cuando se tiene una forma bilineal simétrica. El proceso consiste en:

1. Se toma un vector no isótropo v_1,
2. Se expresa $V = < v_1 > \oplus < v_1 >^{\perp}$.
3. Se reitera el proceso considerando como subespacio $< v_1 >^{\perp}$, esto es, se localiza v_2 no isótropo y se descompone $< v_1 >^{\perp} = < v_2 > \oplus < v_1, v_2 >^{\perp}$. Y así sucesivamente.
4. El proceso finaliza cuando no es posible localizar un vector no isótropo en el subespacio $< v_1, v_2, \ldots, v_i >^{\perp}$. Entonces, la forma bilineal f restringida a $< v_1, v_2, \ldots, v_i >^{\perp}$ es la forma bilineal nula y cualquier base de este subespacio junto con los vectores obtenidos en los pasos anteriores formarán una base ortogonal de V.

Siguiendo los pasos indicados anteriormente se puede demostrar:

Teorema 5.2. *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal simétrica. Entonces, existe una base $\mathfrak{B}$ de V que es ortogonal respecto de f.*

La existencia de una base ortogonal para cualquier forma bilineal simétrica nos permite demostrar

Teorema 5.3. *Sea $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ una matriz simétrica. Entonces, existe D matriz diagonal que es congruente con A.*

Por otro lado, en el caso particular de las formas bilineales simétricas no degeneradas, las bases ortogonales son de una tipo especial:

Teorema 5.4. *Si $f : V \times V \to K$ es una forma bilineal simétrica no degenerada y $\mathfrak{B}_V$ una base ortogonal respecto de f. Entonces, los vectores de $\mathfrak{B}_V$ son no isótropos.*