## 2. Matriz asociada a una forma bilineal.

Al igual que sucede con las aplicaciones lineales, cuando trabajamos con una forma bilineal $f$, podemos dar $f(v,v')$ conociendo los valores que toma la forma bilineal $f$ sobre una base.

**Definición.** Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal y $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base de $V$.Se llama **matriz asociada a la forma bilineal** $f$ respecto de la base $\mathfrak{B}_V$ a la matriz $A_{\mathfrak{B}_V}(f) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ definida por

$$A_{\mathfrak{B}_V}(f) = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & \ldots & f(v_1,v_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(v_n,v_1) & \ldots & f(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

Dada una forma bilineal $f : V \times V \to K$ y una base $\mathfrak{B}_V = \{v_1, \ldots v_n\}$ de $V$, si $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ es la matriz asociada a $f$ respecto de $\mathfrak{B}_V$, entonces

$$f(v,v') = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) A_{\mathfrak{B}_V}(f) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

siendo $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ las coordenadas de los vectores $v$ y $v'$, respectivamente, en la base $\mathfrak{B}_V$. A la expresión anterior de $f(v,v')$ se le conoce como **expresión matricial de la forma bilineal** $f$ en la base $\mathfrak{B}_V$.

Al igual que sucede para aplicaciones lineales, existe una relación entre las matrices asociadas a una misma forma bilineal:

**Teorema 2.1.** *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal, $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}'_V$ dos bases de $V$ y $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ la matriz asociada a $f$ en la base $B_V$ y $A_{\mathfrak{B}'_V}(f)$ la matriz asociada a $f$ en la base $\mathfrak{B}'_V$. Entonces,*

$$A_{\mathfrak{B}'_V}(f) = M^t_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V} A_{\mathfrak{B}_V}(f)(M_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V}),$$

*donde $M_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V}$ es la matriz de cambio de base entre $\mathfrak{B}'_V$ y $\mathfrak{B}_V$.*

También se puede demostrar:

**Teorema 2.2.** *Sea $f : V \times V \to K$ una forma bilineal, $\mathfrak{B}_V$, $\mathfrak{B}'_V$ dos bases de $V$ y $A_{\mathfrak{B}_V}(f)$ la matriz asociada a $f$ en la base $\mathfrak{B}_V$. Entonces, si $M_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V}$ es la matriz de* *cambio de coordenadas entre $\mathfrak{B}'_V$ y $\mathfrak{B}_V$, la matriz $B$ definida por*

$$B = M^t_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V} A_{\mathfrak{B}_V}(f)(M_{\mathfrak{B}'_V \mathfrak{B}_V})$$

*es la matriz asociada a $f$ respecto de $\mathfrak{B}'_V$.*

En vista de la relación que existe entre matrices asociadas a una misma forma bilineal damos la siguiente definición:

**Definición.** Sean $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Se dice que $A$ y $B$ son **congruentes** si existe $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ inversible tal que $B = P^t AP$.

Como se observa, las matrices asociadas a una misma forma bilineal son congruentes.