1. Concepto de forma bilineal.

Definición. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una aplicación. Se dice que f es una **forma bilineal** si f verifica las propiedades siguientes

1. $f(\alpha v + \beta v', v'') = \alpha f(v, v'') + \beta f(v', v''), \qquad \forall \alpha, \beta \in K,\ v, v', v'' \in V.$

2. $f(v, \alpha v' + \beta v'') = \alpha f(v, v') + \beta f(v, v''), \qquad \forall \alpha, \beta \in K,\ v, v', v'' \in V.$

Observamos que si $f : V \times V \to K$ es una forma bilineal y $v_0 \in V$, entonces

$$\begin{array}{rccc} f_{1,v_0}: & V & \to & K \\ & v & \mapsto & f(v_0, v) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} f_{2,v_0}: & V & \to & K \\ & v & \mapsto & f(v, v_0) \end{array}$$

son aplicaciones lineales. Tenemos una caracterización sencilla para saber s i una aplicación $f : V \times V \to K$ es una forma bilineal:

Teorema 1.1. *Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una aplicación. Entonces, f es forma bilineal si y sólo si $\forall \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in K$, $\forall v_1, v_1', v_2, v_2' \in V$*

$$f(\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1', \alpha_2 v_2 + \beta_2 v_2') = \alpha_1\alpha_2 f(v_1, v_2) + \alpha_1\beta_2 f(v_1, v_2') + \beta_1\alpha_2 f(v_1', v_2) + \beta_1\beta_2 f(v_1', v_2').$$

Es fácil construir formas bilineales a partir de aplicaciones lineales:

Teorema 1.2. *Sea V un K-espacio vectorial y $\psi_i : V \to K$, $i = 1, 2$ dos aplicaciones lineales. Entonces, la aplicación $f : V \times V \to K$ definida por*

$$f(v_1, v_2) = \psi_1(v_1)\psi_2(v_2)$$

es una forma bilineal.

Las formas bilineales verifican las siguientes propiedades:

Teorema 1.3. *Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \times V \to K$ una forma bilineal. Entonces,*

(i) $f(0_V, v) = f(v, 0_V) = 0_K$, $\forall v \in V$.

(ii) $f(-v, v') = f(v, -v') = -f(v, v')$, $\forall v, v' \in V$

(iii) $f(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i, v') = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f(v_i, v')$ *y* $f(v, \sum_{i=1}^{l} \alpha_i v_i') = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i f(v, v_i')$,
$\forall \alpha_i \in K$,$\forall v, v_i, v', v_i' \in V$, *con* $i = 1, \ldots, l$.